Серия РЕШЕБНИК

NEW

ТОЛЬКО ДЛЯ РОДИТЕЛЕЙ

Домашняя работа по геометрии

к двум изданиям

11

«ГЕОМЕТРИЯ 10 – 11 классы»

Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.

А.А. Кадеев

Домашняя работа по геометрии за 11 класс

к учебникам «Геометрия, 10–11: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. — 17-е изд. — М.: Просвещение, 2008» и «Геометрия, 10–11: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. — 14-е изд. — М.: Просвещение, 2005»

Учебно-методическое пособие

Издание двенадцатое, переработанное и исправленное

Издательство
«ЭКЗАМЕН»

МОСКВА
2009

УДК 373:514
ББК 22.151я72
К13

Кадеев, А.А.

К13 Домашняя работа по геометрии за 11 класс к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия, 10–11: учеб. для общеобразоват. учреждений»: учебно-методическое пособие / А.А. Кадеев. — 12-е изд., перераб. и испр. — М.: Издательство «Экзамен», 2009. — 190, [2] с. (Серия «Решебник»)

ISBN 978-5-377-02536-8

Предлагаемое учебное пособие содержит подробные решения всех задач, примеров и упражнений за 11 класс из учебников «Геометрия, 10–11: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. — 17-е изд. — М.: Просвещение, 2008» и «Геометрия, 10–11: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. — 14-е изд. — М.: Просвещение, 2005».

Пособие адресовано родителям, которые смогут проконтролировать правильность решения, а в случае необходимости помочь детям в выполнении домашней работы по геометрии.

УДК 373:514
ББК 22.151я72

Подписано в печать с диапозитивов 11.11.2008.
Формат 84x108/32. Гарнитура «Таймс». Бумага газетная.
Уч.-изд. л. 6,91. Усл. печ. л. 10,08. Тираж 25 000 экз. Заказ № 4778(5)

ISBN 978-5-377-02536-8

Содержание

Глава V. Метод координат в пространстве. 4
Вопросы к главе V 45
Дополнительные задачи 47
Глава VI. Цилиндр, конус и шар 61
Вопросы к главе VI 82
Дополнительные задачи 83
Разные задачи на многогранник, цилиндр, конус и шар 97
Глава VII. Объемы тел 112
Вопросы к главе VII 139
Дополнительные задачи 141
Разные задачи на многогранник, цилиндр, конус и шар 151
Глава VIII*. Некоторые сведения из планиметрии 164

Глава V. Метод координат в пространстве

400. а) ось абсцисс: точка C (2;0;0);
б) ось ординат: точка E (0;–1;0);
в) ось аппликат: точка B (0;0;–7),
г) плоскость Oxy: точки H $(-\sqrt{5}\,;\sqrt{3}\,;0)$, E (0;–1;0), C (2;0;0), A(3;-1;0);
д) плоскость Oyz: точки B (0;0;–7), E (0;-1;0), G(0;5;-7);
е) плоскость Oxz: точки B (0;0;–7), C (2;0;0) и D (–4;0;3).

401. Координаты проекций точки A (2; –3, 5):
а) на плоскость Oxz: A_1 (2; 0; 5), на Oxy: A_2 (2; –3; 0); на Oyz: A_3 (0; –3; 5);
б) на ось Ox: A_4 (2; 0; 0), на Oy: A_5 (0; –3; 0), на Oz: A_6(0;0;5).

Точка B $(3; -5.\ \frac{1}{2})$:

а) на плоскость Oxz: $B_1\ (3; 0;\ \frac{1}{2})$, на Oxy: B_2 (3; –5; 0), на Oyz: $B_3\ (0;-5;\ \frac{1}{2})$;

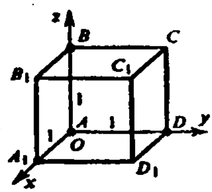
б) на ось Ox: B_4 (3; 0; 0), на Oy: B_5 (0; –5; 0), на Oz: $B_6\ (0;0;\ \frac{1}{2})$.

Точка C $\left(-\sqrt{3}\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\ \sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$:

а) на плоскость Oxz: $C_1\ (\sqrt{3}\,;0;\ \sqrt{5}-\sqrt{3})$, на Oxy: $C_2\ \left(-\sqrt{3}\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;0\right)$, на Oyz: $C_3\ \left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\ \sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$;

б) на ось Ox: $C_1\ (-\sqrt{3}\,;0;0)$, на Oy: $C_5\ \left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;0\right)$, на Oz: $C_6\ (0; 0;\ \sqrt{5}-\sqrt{3})$.

402. A (0; 0; 0), B (0; 0; 1), D (0; 1; 0) и A_1 (1; 0; 0), следовательно, стороны куба равны 1. Куб помещен в пространстве, как показано на рисунке.
Следовательно, по рисунку имеем:
C(0;1;1), B_1(1;0;1), C_1(1,1;1), D_1(1;1;0)



403. $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$; x=3, y=2, z=–5; тогда коорди-наты вектора $\vec{a}$: $\vec{a}$ {3; 2; –5}.
Вектор $\vec{b}=-5\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$; x=–5, y=3, z=–1; $\vec{b}$ {-5; 3; -1}.
Вектор $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}$; x=1, y=–1, z=0; $\vec{c}$ {1;–1;0}.
Вектор $\vec{d}=\vec{j}+\vec{k}$; x=0, y=1, z=1; $\vec{d}$ {0;1;1}.
Вектор $\vec{m}=\vec{k}-\vec{i}$; x=–1, y=0, z=1; $\vec{m}$ {-1;0; 1}.
Вектор $\vec{n}=0{,}7;\vec{k}$ x=0, y=0, z=0,7; $\vec{n}$ {0; 0; 0,7}.

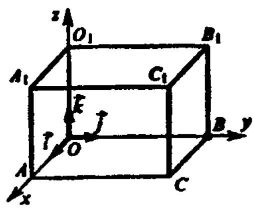
404. Для $\vec{a}$ {5; -1; 2} по формуле $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ координаты вектора x=5,

$y=-1$, $z=2$; следовательно, $\vec{a}=5\vec{i}$ $1\vec{j}+2\vec{k}=5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$

Для $\vec{b}$ $\{-3;-1;0\}$ $x=-3$, $y=-1$, $z=0$; следовательно, $\vec{b}=-3\vec{i}-1\vec{j}+0\vec{z}=-3\vec{i}-\vec{j}$

Для $\vec{c}$ $\{0; -1; 0\}$ $x=0$, $y=-1$, $z=0$; $\vec{c}=0\vec{i}-1\vec{j}+0\vec{k}=-\vec{j}$.

Для $\vec{d}$ $\{0;0; 0\}$ $x=0$, $y=0$, $z=0$ и тогда разложение будет выглядеть так: $\vec{d}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=\vec{0}$.



405. Координаты точки равны соответствующим координатам радиус-вектора (п.44). Соответственно, для радиус-вектора OA_1 рассмотрим точку A_1. Ее координаты и будут координатами вектора OA_1: A_1 (2;0;2) OA_1 {2; 0; 2}. B_1 (0;3;2). Значит, OB_1 {0; 3; 2}. C_1 (0;0;2). Значит OO_1 {0; 0; 2}.

C (2;3;0). Значит, OC {2; 3; 0}. C_1 (2;3;2). Значит, OC_1 {2; 3; 2}.

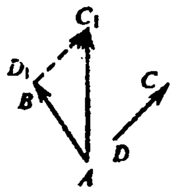
Вектор BC_1 это разность векторов OC_1 и OB. $BC_1=OC_1-OB$; OC_1 {2; 3; 2}, OB {0;3;0}. Следовательно, BC_1 {2–0; 3–3; 2–0}, BC_1 {2; 0; 2}

$AC_1=OC_1-OA$; OC_1 {2; 3; 2}, OA {2; 0; 0}.

AC_1 {2–2; 3–0; 2–0}, AC_1={0; 3; 2}

$O_1C=OC-OO_1$; OC {2; 3; 0}, OO_1 {0; 0; 2}.

O_1C {2–0; 3–0; 0–2}, O_1C {2; 3; –2}.



406. Рассмотрим общий случай. Рассмотрим два некомпланарных вектора AB и DC. Перенесем вектор DC параллельно так, чтобы точка D_1 его начала совпала с точкой B конца первого вектора. Получим вектор D_1C_1 или, что то же самое, вектор BC_1, сонаправленный с вектором DC и равный ему по длине. Согласно правилу сложения векторов: $AB+DC=AB+BC_1=AC_1$.

Пусть AB $\{x_1; y_1; z_1\}$, BC_1 $\{x_2; y_2; z_2\}$. Докажем, что AC_1 $\{x_1+x_2, y_1+y_2; z_1+z_1\}$.

Для доказательства выразим координаты этих векторов через координаты их начала и конца. AB $(x_B-x_A; y_B-y_A; z_B-z_A)$,

BC_1 $\{x_{C_1}-x_B, y_{C_1}-y_B, z_{C_1},-z_B\}$, AC_1 $(x_{C_1}-x_A; y_{C_1}-y_A, z_{C_1}-z_A\}$, из обозначения координат вектора AB как x_1, y_1 и z_1 и вектора BC_1 как x_2, y_2, z_2, получим $x_1=x_B-x_A$, $y_1=y_B-y_A$, $z_1=z_B-z_A$, $x_2=x_{C_1}-x_B$, $y_2=y_{C_1}-y_B$, $z_2=z_{C_1}-z_B$.

Вычислим суммы x_1+x_2, y_1+y_2, z_2+z_2. $x_1+x_2=x_B-x_a+x_{C1}-x_B=x_{C1}-x_A$,

$y_1+y_2=y_B-y_A+y_{C1}-y_B=y_{C1}-y_A$, $z_2+z_2=z_B-z_A+z_{C1}-z_B=z_{C1}-z_A$,

Суммы координат x_1+x_2, y_1+y_2, z_2+z_2 являются координатами вектора AC_1, равного сумме исходных двух векторов AB и DC. Что и требовалось доказать.

407. а) Обозначим $\vec{a}+\vec{b}=\vec{p}$,

$x_p=x_a+x_b$; $x_a=3$; $x_b=0$; $y_p=y_a+y_b$; $y_a=-5$; $y_b=7$; $z_p=z_a+z_b$, $z_a=2$, $z_b=-1$, $x_p=3+0=3$; $y_p=-5+7=2$; $z_p=2-1=1$.

$\vec{p}$ {3;2,1}

б) Обозначим $\vec{a}+\vec{c}=\vec{e}$

$x_e=x_a+x_c=3+\frac{2}{3}=3\frac{2}{3}$. $y_e=y_a+y_c=-5+0=-5$. $z_e=z_a+z_c=2+0=2$.

$\vec{e}$ $\{3\frac{2}{3};-5;2\}$.

в) Обозначим $\vec{b}+\vec{c}=\vec{f}$.

$x_f=x_b+x_c=0+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$; $y_f=y_b+y_c=7+0=7$. $z_f=z_b+z_c=-1+0=-1$;

$\vec{f}$ $\{\frac{2}{3};7;-1\}$.

г) Обозначим $\vec{d}+\vec{b}=\vec{r}$.

$x_r=x_d+x_b=-2,7+0=-2,7$; $y_r=y_d+y_b=3,1+7=10,1$. $z_r=z_d+z_b=0,5-1=-0,5$.

$\vec{r}$ {−2,7; 10,1; −0,5}.

д) Обозначим $\vec{d}+\vec{a}=\vec{s}$.

$x_s=x_d+x_a=-2,7+3=0,3$; $y_s=y_d+y_a=3,1-5=-1,9$. $z_s=z_d+z_a=0,5+2=2,5$.

$\vec{s}$ {0,3; −1,9; 2,5}

е) Обозначим $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{q}$

$x_q=x_a+x_b+x_c=3+0+\frac{2}{3}=3\frac{2}{3}$;

$y_q=y_a+y_b+y_c=-5+7+0=2$;

$z_q=z_a+z_b+z_c=2-1+0=1$;

$\vec{q}$ $\{3\frac{2}{3};2;1\}$

ж) Обозначим $\vec{b}+\vec{a}+\vec{d}=\vec{k}$.

$x_k=x_b+x_a+x_d=0+3-2,7=0,3$;

$y_k=y_b+y_a+y_d=7-5+3,1=5,1$;

$z_k=z_b+z_a+z_d=-1+2+0,5=1,5$;

$\vec{k}$ {0,3; 5,1; 1,5}.

з) Обозначим $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{m}$,

$x_m=x_a+x_b+x_c+x_d=3+0+\frac{2}{3}-2,7=3+\frac{20}{30}-\frac{27\cdot 3}{30}=3+\frac{20-81}{30}=3-\frac{61}{30}=\frac{29}{30}$.

$y_m=y_a+y_b+y_c+y_d=-5+7+0+3,1=5,1$; $z_m=z_a+z_b+z_c+z_d=2-1+0+0,5=1,5$.

$\vec{m}=\{\frac{29}{30};5,1;1,5\}$.

408. Согласно п.44 имеем: AC $\{x_C-x_A, y_C-y_A, z_C-z_A\}$

По рисунку имеем: A(4; 0; 0); B(0; 9; 0); C(0; 0; 2).

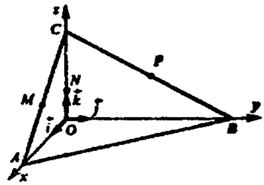
AC $x_C-x_A=0-4=-4$; $y_C-y_A=0-0=0$;

$z_c-z_A=2-0=2$; AC $\{-4;0;2\}$.

CB$\{x_B-x_C, y_B-y_C; z_B-z_C\}$

$x_B-x_C=0-0=0$; $y_B-y_C=9-0=9$; $z_B-z_C=0-2=-2$;

CB $\{0;9;-2\}$.



AB: $\{x_B-x_A, y_B-y_A; z_B-z_A\}$.

$x_B-x_A=0-4=-4$; $y_B-y_A=9-0=9$;

$z_B-z_A=0-0=0$; AB$\{-4;9;0\}$.

MN $\{x_N-x_M, y_N-y_M, z_N-z_M\}$.

Координаты точек M, N и P являются координатами векторов OM, ON и OP соответственно. Тогда согласно п. 45:

ON$=\frac{1}{2}$OC. Тогда ON$\{\frac{1}{2}x_C; \frac{1}{2}y_C; \frac{1}{2}z_C\}$; ON $\{\frac{1}{2}\cdot 0; \frac{1}{2}\cdot 0; \frac{1}{2}\cdot 2\}$;

ON $\{0;0,1\}$; N $\{0;0;1\}$.

Вектор OM: точка M — середина отрезка AC. Значит OM$=\frac{1}{2}$(OA+OC),

$x_M=\frac{1}{2}(x_A+x_C)=\frac{1}{2}(4+0)=2$; $y_м=\frac{1}{2}(y_A+y_C)=\frac{1}{2}(0+0)=0$

$z_M=\frac{1}{2}(z_A+z_C)=\frac{1}{2}(0+2)=1$;

M (2; 0; 1); OM $\{2;0;1\}$.

MN: $x_N-x_M=0-2=-2$; $y_N-y_M=0-0=0$; $z_N-z_M=1-1=0$; MN $\{-2;0;0\}$

Точка P — середина отрезка BC. Значит:

OP$=\frac{1}{2}$ (OB+OC), $x_p=\frac{1}{2}(x_B+x_C)=\frac{1}{2}(0+0)=0$; $y_p=\frac{1}{2}(y_B+y_C)=\frac{1}{2}(9+0)=4\frac{1}{2}$,

$z_p=\frac{1}{2}(z_B+z_C)=\frac{1}{2}(0+2)=1$,

P=$(0;4\frac{1}{2};1)$; OP $\{0; 4\frac{1}{2}, 1\}$

BM: $\{x_м-x_B; y_м-y_B; z_м-z_B\}$,

$x_м-x_B=2-0=2$; $y_м-y_B=0-9=-9$; $z_м-z_B=1-0=1$,

BM $\{2; -9; 1\}$.

NP $\{x_P-x_N; y_P-y_N; z_P-z_N\}$;

$x_P-x_N=0-0=0$; $y_P-y_N=4\frac{1}{2}-0=4\frac{1}{2}$; $z_P-z_N=1-1=0$;

NP $\{0;3\frac{1}{2}; 0\}$

409. Чтобы найти координаты вектора разности, нужно найти разности соответствующих координат этих векторов.

$x_a=5$; $y_a=-1$; $z_a=1$, $x_b=-2$; $y_b=1$; $z_b=0$,

$x_c=0$; $y_c=0{,}2$; $z_c=0$, $x_d=-\frac{1}{3}$; $y_d=2\frac{2}{5}$; $z_d=-\frac{1}{7}$

а) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{p}$ б) $\vec{b}-\vec{a}=\vec{r}$,

$\vec{p}\ \{x_a-x_b;\ y_a-y_b;\ z_a-z_b\}$

$\vec{p}\ \{5-(-2);\ -1-1;\ 1-0\}$

$p\ \{7,\ -2;1\}$.

$\vec{r}\ \{x_b-x_a,\ y_b-y_a;\ z_b-z_a\}$,

$\vec{r}\ \{-2-5;\ 1-(-1);\ 0-1\}$,

$\vec{r}\ \{-7,\ 2;-1\}$.

в) $\vec{a}-\vec{c}=\vec{q}$,

$\vec{q}\ \{5-0;\ -1-0{,}2\ 1-0\}$,

$\vec{q}\ \{5;-1{,}2;1\}$.

г) $\vec{d}-\vec{a}=\vec{e}$,

$\vec{e}\ \{x_d-x_a;\ y_d-y_a;\ z_d-z_a\}$,

$\vec{e}\ \{-\frac{1}{3}-5;\ 2\frac{2}{5}-(-1);\ -\frac{1}{7}-1\}$,

$\vec{e}\ \{-5\frac{1}{3};\ 3\frac{2}{5};\ -1\frac{1}{7}\}$.

д) $\vec{c}-\vec{d}=\vec{f}$,

$\vec{f}\ \{x_c-x_d;\ y_c-y_d,\ z_c-z_d\}$,

$\vec{f}\ \{0-(-\frac{1}{3});\ 0{,}2-2\frac{2}{5};\ 0-(-\frac{1}{7})\}$,

$\vec{f}\ \{\frac{1}{3};\ -2{,}2,\ \frac{1}{7}\}$.

е) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ пусть $\vec{a}-\vec{b}=\vec{m}$, $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\vec{m}+\vec{c}=\vec{n}$, следовательно
$\vec{m}\ \{x_a-x_b;\ y_a-y_b;\ z_a-z_b\}$. $\vec{n}\ \{(x_a-x_b)+x_c;\ (y_a-y_b)+y_c;\ (z_a-z_b)+z_c\}$
$\vec{n}\ \{5-(-2)+0;\ -1-1+0{,}2;\ 1-0+0\}$, $\vec{n}\ \{7;\ -1{,}8;\ 1\}$

ж) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\vec{l}$, $\vec{l}\ \{x_a-x_b-x_c;\ y_a-y_b-y_c;\ z_a-z_b-z_c\}$,
$\vec{l}\ \{5+2-0;\ -1-1-0{,}2;\ 1-0-0\}$, $\vec{l}\ \{7;\ -2{,}2;1\}$.

з) Вектор $2\vec{a}$ будет иметь координаты $\{2x_a;\ 2y_a;\ 2z_a\}$, или $\{10;-2;2\}$.

и) Вектор $-3\vec{b}$ будет иметь координаты: $\{-3x_b;\ -3y_b;\ -3z_b\}$, или $\{6;\ -3;\ 0\}$.

к) $-6\vec{c}\ \{-6x_c;\ -6y_c;\ -6z_c\}$, или $\{-6\cdot0;\ -6\cdot0{,}2;\ -6\cdot0\}$, $-6\vec{c}\ \{0;\ -1{,}2;\ 0\}$

л) $-\frac{1}{3}\vec{d}\ \{-\frac{1}{3}x_d;\ -\frac{1}{3}y_d;\ -\frac{1}{3}z_d\}$, $-\frac{1}{3}\vec{d}\ \{-\frac{1}{3}\cdot(-\frac{1}{3});\ -\frac{1}{3}\cdot2\frac{2}{5};\ -\frac{1}{3}\cdot(-\frac{1}{7})\}$,

$-\frac{1}{3}\vec{d}\ \{\frac{1}{9};\ -\frac{12}{15};\ \frac{1}{21}\}$, или $-\frac{1}{3}\vec{d}\ \{\frac{1}{9};\ -\frac{4}{5};\ \frac{1}{21}\}$.

м) $0{,}2\vec{b}\ \{0{,}2x_b;\ 0{,}2y_b;\ 0{,}2z_b\}$, $0{,}2\vec{b}\ \{0{,}2\cdot(-2);\ 0{,}2\cdot1;\ 0{,}2\cdot0\}$,

$0{,}2\vec{b}\ \{-0{,}4;\ 0{,}2;\ 0\}$.

410. Согласно условиям

$\vec{a}$ $x_a=-1$, $y_a=2$, $z_a=0$; $\vec{b}$ $x_b=0$, $y_b=-5$, $z_b=-2$; $\vec{c}$: $x_c=2$, $y_c=1$, $z_c=-3$

Для вектора $\vec{p}$ вычислим отдельно каждое слагаемое:

$3\vec{b}\ \{3x_b;\ 3y_b;\ 3z_b\}$, $3\vec{b}\ \{3\cdot0;\ 3\cdot(-5);\ 3\cdot(-2)\}$,

$3\vec{b}\ \{0;\ -15;\ -6\}$, обозначим $3\vec{b}=\vec{m}$.

$-2\vec{a}\ \{-2x_a,\ -2y_a;\ -2z_a\}$, $-2\vec{a}\ \{-2\cdot(-1);\ -2\cdot2;\ -2\cdot0\}$,

$-2\vec{a}\ \{2;\ -4;\ 0\}$. обозначим $-2\vec{a}=\vec{n}$.

Следовательно $\vec{p}=3\vec{b}-2\vec{a}+\vec{c}=\vec{m}+\vec{n}+\vec{c}$ будет иметь координаты·

$\vec{p}$ $\{x_m+x_n+x_c;\ y_m+y_n+y_c;\ z_m+z_n+z_c\}$, $\vec{p}$ $\{0+2+2; -15-4+1; -6+0-3\}$,

$\vec{p}$ $\{4;-18;-9\}$.

Для вектора $\vec{q}$ аналогично вычислим: $3\vec{c}$ $\{3x_c;\ 3y_c;\ 3z_c\}$,

$3\vec{c}$ $\{3\cdot2; 3\cdot1; 3\cdot(-3)\}$, $3\vec{c}$ $\{6; 3; -9\}$, обозначим $3\vec{c}=\vec{r}$

$-2\vec{b}$ $\{-2x_b; -2y_b, -2z_b\}$, $-2\vec{b}$ $\{-2\cdot0; -2\cdot(-5); -2\,(-2)\}$,

$-2\vec{b}$ $\{0; 10; 4\}$, обозначим $-2\vec{b}=\vec{e}$

Следовательно $\vec{q}=3\vec{c}-2\vec{b}+\vec{a}=\vec{r}+\vec{e}+\vec{a}$,

$\vec{q}$ $\{x_r+x_e+x_a;\ y_r+y_e+y_a;\ z_r+z_e+z_a\}$, $\vec{q}$ $\{6+0+(-1)\cdot 3+10+2; -9+4+0\}$,

$\vec{q}$ $\{5; 15; -5\}$.

411. По правилам суммы, разности, произведения векторов (п. 43) имеем.

а) $3\vec{a}$ $\{3\cdot(-1); 3\cdot1; 3\cdot1)$, $3\vec{a}$ $\{-3; 3; 3\}$. $2\vec{b}$ $\{2\cdot0; 2\cdot2; 2\cdot(-2)\}$. $2\vec{b}$ $\{0; 4, -4\}$

Обозначим: $3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}=(3\vec{a}+2\vec{b})-\vec{c}=\vec{s}-\vec{c}$;

$\vec{s}=3\vec{a}+2\vec{b}$; $\vec{s}$ $\{-3; 7; -1\}$; $\vec{c}$ $\{-3; 2; 0\}$; $\vec{s}-\vec{c}=\vec{r}$,

$\vec{r}$ $\{-3-(-3); 7-2; -1-0\}$; $\vec{r}$ $\{0; 5; -1\}$.

б) $2\vec{c}$ $\{2\cdot(-3); 2\cdot2; 2\cdot0\}$; $2\vec{c}$ $\{-6; 4; 0\}$; $\vec{a}$ $\{-1; 1; 1\}$;

$-\vec{a}+2\vec{c}-\vec{d}=(-\vec{a}+2\vec{c})-\vec{d}=\vec{p}-\vec{d}$;

$\vec{p}=2\vec{c}-\vec{a}$; $\vec{p}$ $\{-6-(-1); 4-1; 0-1\}$; $\vec{p}$ $\{-5; 3; -1\}$; $\vec{d}$ $\{-2; 1; -2\}$;

$\vec{p}-\vec{d}=\vec{q}$; $\vec{q}$ $\{-5-(-2); 3-1; -1-(-2)\}$; $\vec{q}$ $\{-3; 2; 1\}$.

в) $0{,}1\vec{a}$ $\{0{,}1\cdot(-1); 0{,}1\cdot1; 0{,}1\cdot1\}$, $0{,}1\vec{a}$ $\{-0{,}1; 0{,}1; 0{,}1\}$

$3\vec{b}$ $\{3\cdot0; 3\cdot2; 3\cdot(-2)\}$, $3\vec{b}$ $\{0; 6; -6\}$.

$0{,}7\vec{c}$ $\{0{,}7\cdot(-3); 0{,}7\cdot2; 0{,}7\cdot0\}$, $0{,}7\vec{c}$ $\{-2{,}1; 1{,}4; 0)$.

$5\vec{d}$ $\{5\cdot(-2); 5\cdot1; 5\cdot(-2)\}$, $5\vec{d}$ $\{-10; 5; -10\}$.

Все сложим, тогда в выражении $0{,}1\vec{a}+3\vec{b}+0{,}7\vec{c}-\vec{d}$ введем обозначение

$0{,}1\vec{a}+3\vec{b}=\vec{n}$, $\vec{n}+0{,}7\vec{c}=\vec{m}$ $\vec{m}-5\vec{d}=\vec{l}$.

$\vec{n}$ $\{-0{,}1+0; 0{,}1+6; 0{,}1+(-6)\}$, $\vec{n}$ $\{-0{,}1; 6{,}1; -5{,}9\}$.

$\vec{m}$ $\{-0{,}1+(-2{,}1); 6{,}1+1{,}4; -5{,}9+0\}$, $\vec{m}$ $\{-2{,}2; 7{,}5; -5{,}9\}$.

$\vec{l}$ $\{-2{,}2-(-10); 7{,}5-5; -5{,}9-(-10)\}$, $\vec{l}$ $\{7{,}8; 2{,}5; 4{,}1\}$.

г) $2\vec{a}$ $(2\cdot(-1); 2\cdot1; 2\cdot1)$, $2\vec{a}$ $\{-2; 2; 2\}$, $3\vec{b}$ $\{0; 6; -6\}$.

$2\vec{b}$ $\{0; 4; -4\}$, $\vec{a}-2\vec{b}=\vec{f}$, $\vec{f}$ $\{-1-0; 1-4; 1-(-4)\}$, $\vec{f}$ $\{-1; -3; 5\}$

$2\vec{a}+3\vec{b}=\vec{e}$, $\vec{e}$ $\{-2+0; 2+6; 2+(-6)\}$, $\vec{e}$ $\{-2; 8; -4\}$.

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{g}$, $\vec{g}$ $\{-1-0; 1-2; 1-(-2)\}$, $\vec{g}$ $\{-1; -1; 3\}$.

$2(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{g}=\{-2;-2;6\}$

Следовательно веутор $(2\vec{a}+3\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})$ имеет координаты

$\{-2-(-1);\ 8-(-3);\ -4-5\}$, или $\{-1;\ 11;\ -9\}$ и значит $(2\vec{a}+3\vec{b})-$ $-(\vec{a}-2\vec{b})+2(\vec{a}-\vec{b})$ имеет координаты $\{-1+(-2);\ 11+(-2);\ -9+6\}$, или $\{-3;\ 9;\ -3\}$.

412. Для вектора $\vec{i}$ противоположным будет вектор с обратным знаком: $(-\vec{i})$. для $\vec{j}$ - вектор $(-\vec{j})$ и т. д.

$\vec{i}\ \{1;\ 0;\ 0\}$: $-\vec{i}\ \{-1;\ 0;\ 0\}$, $\vec{j}\ \{0;\ 1;\ 0\}$; $-\vec{j}\ \{0;\ -1;\ 0\}$, $\vec{k}\ \{0;\ 0;\ 1\}$; $-\vec{k}\ \{0;\ 0;\ -1\}$,

$\vec{a}\ \{2.\ 0:\ 0\}$: $-\vec{a}\ \{-2;\ 0;\ 0\}$, $\vec{b}\ \{-3;\ 5;\ -7\}$; $-\vec{b}\ \{3;\ -5;\ 7\}$, $\vec{c}\ \{-0{,}3;\ 0;\ 1{,}75\}$; $-\vec{c}\ \{0{,}3;\ 0;\ -1{,}75\}$.

413. а) Координаты вектора $\vec{a}\ \{3;\ 6;\ 8\}$ и вектора $\vec{b}\ \{6;\ 12;\ 16\}$ пропорциональны: $\frac{3}{6}=\frac{6}{12}=\frac{8}{16}$, где $k=\frac{1}{2}$.

Поэтому $\vec{a}=k\vec{b}$, и, следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

б) Координаты вектора $\vec{c}\ \{1;\ -1;\ 3\}$ и вектора $\vec{d}\ \{2;\ 3;\ 15\}$ не пропорциональны, например $\frac{1}{2}\neq-\frac{1}{3}$

Следовательно векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ не коллинеарны.

в) Координаты вектора $\vec{i}\ \{1;\ 0;\ 0\}$ и вектора $\vec{j}\ \{0;\ 1;\ 0\}$ не пропорциональны, следовательно, векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ не коллинеарны.

г) Координаты вектора $\vec{m}\ \{0;\ 0;\ 0\}$ и вектора $\vec{n}\ \{5;\ 7;\ -3\}$ пропорциональны при $k=0$, следовательно, векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ коллинеарны. $\vec{m}=0$ коллинеарен любому вектору.

д) Координаты вектора $\vec{p}\ \{\frac{1}{3};\ -1;\ 5\}$ и вектора $\vec{q}\ (-1;\ -3;\ -15\}$ не пропорциональны, например $\frac{\frac{1}{3}}{-1}\neq\frac{-1}{-3}$

Поэтому векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны.

414. Для коллинеарных векторов существуют коэффициент k такой, что $\vec{a}=k\vec{b}$: $\frac{x_a}{x_b}=\frac{y_a}{y_b}=\frac{z_a}{z_b}=k$.

а) $\frac{15}{18}=\frac{m}{12}=\frac{1}{n}=\frac{5}{6}$,

$m=\frac{5}{6}\cdot 12=5\cdot 2=10$,

б) $\frac{m}{(-\frac{1}{2})}=\frac{0{,}4}{n}=-\frac{1}{5}$,

$m=-\frac{1}{5}\cdot(-\frac{1}{2})=0{,}1$,

$n=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}=1{,}2;$ $\qquad\qquad$ $n=-0{,}4\cdot 5=-2$

415. а) Векторы $\vec{a}\,\{-3;\,-3;\,0\}$, $\vec{i}\,\{1;\,0;\,0\}$ и $\vec{j}\,\{0.\,1.\,0\}$ являются компланарными, т.к., записав равенство $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$ через координаты получим

$$\begin{cases}-3=1\cdot x+0\cdot y,\\ -3=0\cdot x+1\cdot y,\\ 0=0\cdot x+0\cdot y,\end{cases}\qquad \begin{cases}x=-3,\\ y=-3.\end{cases}$$

Вектор $\vec{a}$ можно разложить по векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ $\vec{a}=-3\vec{i}-3\vec{j}$ Значит векторы $\vec{a}$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ компланарны.

б) Запишем равенство $\vec{b}=x\vec{i}+y\vec{j}$ через координаты:

$$\begin{cases}2=1\cdot x+0\cdot y\\ 0=0\cdot x+1\cdot y\\ -3=0\cdot x+0\cdot y\end{cases}$$

Система не имеет решений, следовательно, $\vec{b}$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$ не компланарны

в) Запишем равенство $\vec{c}=x\vec{i}+\vec{k}\,y$ через координаты: $\vec{c}\,\{1;\,0;\,-2\}$, $\vec{i}\,\{1,\,0;\,0\}$. $\vec{k}\,\{0;\,0;\,1\}$.

$$\begin{cases}1=1\cdot x+0\cdot y,\\ 0=0\cdot x+0\cdot y,\\ -2=0\cdot x+1\cdot y,\end{cases}\quad \begin{cases}1=x,\\ 0=0,\\ -2=y.\end{cases}\Rightarrow \vec{c}=\vec{i}-2\vec{k}$$

Значит, векторы $\vec{c}$, $\vec{i}$ и $\vec{k}$ компланарны.

г) Векторы $\vec{d}\,\{1;-1;2\}$ и $\vec{e}\,\{-2;\,0;\,1\}$ не коллинеарны, т.к. координаты вектора $\vec{d}$ не пропорциональны координатам вектора $\vec{e}$. Если вектор $\vec{f}\,\{5,\,-1,\,0\}$ можно разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, то это значит, что векторы $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$ компланарны. В противном случае векторы $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$ не компланарны.

Запишем $\vec{f}=x\vec{d}+y\vec{e}$ в координатах, получим

$$\begin{cases}5=x-2y\\ -1=-x\\ 0=2x+y\end{cases}$$

Система имеет решение: x=1, y=–2. Поэтому вектор $\vec{f}$ можно разложить по векторам $\vec{d}$ и $\vec{e}$, и, следовательно, векторы $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$ компланарны

д) Запишем равенство $\vec{m}=x\vec{n}+y\vec{p}$ в координатах:

$2=1\cdot x+0\cdot y,$

Система не имеет решений. Поэтому векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ не компланарны.

е) Запищем равенство $\vec{q}=x\vec{r}+y\vec{s}$ в координатах:

$$\begin{cases}0=3x+y,\\5=3x+y,\\3=3x+4y,\end{cases}\quad \begin{cases}y=-3x\\y=5-3x\\y=-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}x\end{cases}$$

Система не имеет решений. Поэтому векторы $\vec{q}=\vec{r}+\vec{s}$ не компланарны.

416. A (3, 2; 1); B (1; –3; 5); C $(-\frac{1}{3}; 0{,}75; -2\frac{3}{4})$, т.к. согласно п.44, координаты любой точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора

417. OA {2;–3;0}, OB {7; –12; 18} OC {–8; 0; 5}, т.к. если O — начало координат, то OA, OB и OC — являются радиус-векторами для точек A, B и C и согласно п.44 имеют координаты.

418. а) AB{2–3; –1+1; 4–2}, AB {–1; 0; 2};

б) AB {3+2; –1–6; 0+2}, AB {5; –7; 2};

в) AB $\{\frac{1}{2}-1; \frac{1}{3}-\frac{5}{6}; \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\}$, AB $\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\}$

419. A (1; 6; 2) и B (2; 3; –1). Координатами вектора AB будут:

AB $\{x_B-x_A; y_B-y_A; z_B-z_A\}$, AB {2–1; 3–6; –1–2}, AB {1; –3; –3}.

Разложив по координатным векторам $\vec{i}$ {1; 0; 0}, $\vec{j}$ {0; 1; 0} и $\vec{k}$ {0; 0; 1}, получим: AB$=\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$.

Точки B (2; 3; –1) и C (–3; 4; 5) —концы вектора BC.

BC {–3–2;4–3; 5+1}, BC {–5; 1; 6}, BC$=-5\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}$.

Точки A (1; 6; 2) и C (–3; 4; 5) —концы вектора CA.

CA {1+3; 6–4; 2–5}, CA {4; 2; –3}, CA$=4\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

420. Определим координаты: AB {2–3; 3+1; –4–5}, AB {–1; 4; –9},
DC {7–8; 0+4; –1–8}, DC{–1; 4; –9}.

Т.к. AB и DC имеют одинаковые координаты, то
1) их длины равны;
2) если их отложить от начала координат, то эти векторы совпадут.
Значит, векторы AB и DC равны, что и требовалось доказать.
Рассмотрим векторы BC и AD.
BC {7–2; 0–3; –1+4}, BC{5; –3; 3}. AD{8–3; –4+1; 8–5}, AD {5; –3; 3}.
У векторов BC и AD тоже совпадают координаты, а значит, рассуждая аналогично, получим, что векторы совпадают.

421. а) Если векторы AB и AC коллинеарны, то точки A, B и C лежат на одной прямой, а если не коллинеарны, то точки A, B и C не лежат на одной прямой. Вычислим координаты этих векторов: AB {–8; 11; –7},

AC {24; –33; 21}. Заметим, AC=–3AB, следовательно, векторы AB и AC коллинеарны, т.е. точки A, B и C лежат на одной прямой.

б) Найдем координаты векторов AB и AC. AB {9; –15; –9}, AC {18; –30; –18}. Очевидно, что AC=2 AB, поэтому векторы AB и AC коллинеарны, значит точки A, B, и C лежат на одной прямой

в) Найдем координаты векторов AB и AC. AB {1, –9; 9}, AC {2, –18, –14} Векторы AB и AC не коллинеарны, значит, точки A, B и C не лежат на одной прямой.

422. Рассмотрим векторы DA, DB, DC.

а) Вычислим координаты векторов DA, DB и DC

DA {–2, –13, 3}=$\vec{a}$, DB {1, 4, 1}=$\vec{b}$ DC {–1, –1, -4}=$\vec{c}$

Запишем равенство $\vec{a}$=m$\vec{b}$+n$\vec{c}$ в координатах (условие компланарности)

$$\begin{cases} x_a = mx_b + nx_c \\ y_a = my_b + ny_c \\ z_a = mz_b + nz_c \end{cases} \quad \begin{cases} -2 = m - n, \\ -13 = 4m - n, \\ 3 = m - 4n, \end{cases} \quad \begin{cases} m = n - 2, \\ 4m = n - 13, \\ m = 3 + 4n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = n - 2, \\ n - 2 = 3 + 4n, \\ 4m = n - 13, \end{cases} \quad \begin{cases} n = -\frac{5}{3}, \\ m = -\frac{11}{3}. \end{cases}$$

Получаем равенство: $-\frac{44}{3} = -\frac{5}{3} - 13 = \frac{-5-39}{3}$

Признак компланарности векторов выполняется DA=$-\frac{11}{3}$DB$-\frac{5}{3}$DC

По определению векторы DA, DB и DC компланарны. Следовательно, точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

б) Определим координаты предполагаемых векторов:

AD {2; –1; 3}=$\vec{d}$, AB {3; 3; –1}=$\vec{b}$, AC {–2, –4, 0}=$\vec{c}$

Признак компланарности векторов в координатах.

$$\begin{cases} x_d = mx_b + nx_c, \\ y_d = my_b + ny_c, \\ z_d = mz_b + nz_c, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = 3m - 2n, \\ -1 = 3m - 4n, \\ 3 = -m - 0 \cdot n, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 + 2n = 3m, \\ 4n = 3m + 1, \\ m = -3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 2n = -9, \\ 4n = -8, \\ m = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} n = -5{,}5, \\ n = -2, \\ m = -3. \end{cases}$$

Система не имеет решений, следовательно, условие компланарности векторов не исполняется, точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости.

в) Рассмотрим векторы:

AD {–4; 2; –2}=$\vec{d}$, AB {–7; 8; 1}=$\vec{b}$, AC (7; –14, –7}=$\vec{c}$

Признак компланарности векторов $\vec{d}$=m$\vec{b}$+n$\vec{c}$ в координатах x, y, z:

$$\begin{cases} x_d = mx_b + nx_c \\ y_d = my_b + ny_c \\ z_d = mz_b + nz_c \end{cases} \quad \begin{cases} -4 = -7m + 7n \\ 2 = 8m - 14n \\ -2 = m - 7n \end{cases} \quad \begin{cases} 7m = 7n + 4 \\ 8m = 2 + 14n \\ m = 7n - 2 \end{cases}$$

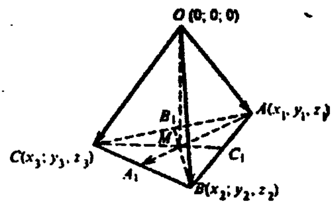
$$\begin{cases}7n = m + 2, \\ 7m = (m + 2) + 4, \\ 8m = 2 + 14n,\end{cases} \quad \begin{cases}6m = 6, \\ n = \frac{m}{7} + \frac{2}{7}, \\ 8m = 2 + 14n,\end{cases} \quad \begin{cases}m = 1, \\ n = \frac{3}{7}.\end{cases}$$

Подставляя эти значения в третье уравнение, получаем равенство: $8=2+\frac{14\cdot 3}{7}$; $8=8$.

Следовательно, векторы компланарны при $m=1$, $n=\frac{3}{7}$. $AD=AB+\frac{3}{7}AC$. При этом все три вектора отложены из одной точки, значит, точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

423. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC, а M — точка их пересечения. Докажем, что точка M имее координаты

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right).$$



Координаты точки равны координатам ее радиус-вектора. Выберем произвольно начало координат и начертим радиус-векторы $\vec{OM}$, $\vec{OC}$, $\vec{OB}$, и $\vec{OA}$. Их координаты будут соответствовать координатам точек M, C, B, A соответственно. По теореме о точке пересечения медиан треугольника $\vec{AM}=2\vec{MA_1}$.

Так как $\vec{AM}=\vec{OM}-\vec{OA}$, $\vec{MA_1}=\vec{OA_1}-\vec{OM}$, то, подставив эти разности в наше равенство, получим:

$$\vec{OM}-\vec{OA}=2(\vec{OA_1}-\vec{OM}), \text{ или } \vec{OM}+2\vec{OM}=\vec{OA}+2\vec{OA_1},$$

или $3\vec{OM}=\vec{OA}+2\cdot\frac{\vec{OC}+\vec{OB}}{2}$, т.к. $\vec{OA_1}=\frac{\vec{OC}+\vec{OB}}{2}$.

Следовательно, $\vec{OM}=\frac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}}{2}$ или,

$M\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$. Доказано.

424. Координаты середины отрезка выражаются через координаты его начала и конца:

$x_M=\frac{1}{2}(x_A+x_B)$, $y_M=\frac{1}{2}(y_A+y_B)$, $z_M=\frac{1}{2}(z_A+z_B)$. Подставим координаты данных нам точек:

а) $x_M=\frac{1}{2}(0-2)$; $x_M=-1$, $y_M=\frac{1}{2}(3+2)$, $y_M=\frac{5}{2}=2{,}5$; $z_M=\frac{1}{2}(-4+0)$, $z_M=-2$;

б) $3=\frac{1}{2}(14+x_B)$, $x_B=-8$; $-2=\frac{1}{2}(-8+y_B)$, $y_B=4$; $-7=\frac{1}{2}(5+z_B)$; $-14=5+z_B$, $z_B=-19$;

в) $-12=\frac{1}{2}(x_A+0)$, $x_A=-24$; $4=\frac{1}{2}(y_A+0)$, $y_A=8$, $15=\frac{1}{2}(z_A+2)$, $z_A=28$.

425. Пусть M — середина отрезка AB. Тогда $x_M=\frac{1}{2}(x_A+x_B)$, $y_M=\frac{1}{2}(y_A+y_B)$, $z_M=\frac{1}{2}(z_A+z_B)$. Т.к. точка лежит на Ox по условию, то справедливо:

$x_M=\frac{1}{2}(x_A+x_B)$, $0=\frac{1}{2}(y_A+y_B)$, $0=\frac{1}{2}(z_A+z_B)$.

а) $\begin{cases} x_M=\frac{1}{2}(-3+2) \\ 0=\frac{1}{2}(m-2) \\ 0=\frac{1}{2}(5+n). \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{m}{2}=1 \\ \frac{n}{2}=-\frac{5}{2} \\ x_M=-\frac{3}{2}+1 \end{cases}$; $\begin{cases} m=2 \\ n=-5 \\ x_M=-\frac{1}{2} \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_M=\frac{1}{2}(1+1) \\ 0=\frac{1}{2}(0{,}5+m) \\ 0=\frac{1}{2}(-4+2n) \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{m}{2}=-\frac{1}{4} \\ \frac{2n}{2}=2 \\ x_M=1 \end{cases}$, $\begin{cases} m=-\frac{1}{2}=-0{,}5 \\ n=2 \\ x_M=1 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_M=\frac{1}{2}(0+1) \\ 0=\frac{1}{2}(m+n) \\ 0=\frac{1}{2}(n+1-m+1) \end{cases}$; $\begin{cases} x_M=\frac{1}{2} \\ m=-n \\ \frac{n}{2}+1=\frac{m}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x_M=\frac{1}{2} \\ m=-n \\ m=n+2 \end{cases}$;

$\begin{cases} x_M=\frac{1}{2} \\ m=-n \\ 2m=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_M=\frac{1}{2} \\ m=1 \\ n=-1 \end{cases}$.

426. $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ по определению, тогда

$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2+z_1)^2}$, где A $(x_1; y_1; z_1)$, B $(x_2; y_2; z_2)$.

а) A (–1; 0; 2), B (1; –2; 3),

$|AB|=\sqrt{(1+1)^2+(-2-0)^2+(3-2)^2}$, $|AB|=\sqrt{(4+4+1)}=3$;

б) A (–35; –17; 20), B (–34; –5; 8),

$|AB|=\sqrt{(-34+35)^2+(-5+17)^2+(8-20)^2}$,

$|AB|=\sqrt{1^2+12^2+(-12)^2}=\sqrt{289}=17$.

427. $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, тогда $|\vec{a}|=\sqrt{5^2+(-1)^2+7^2}=\sqrt{75}=\sqrt{25\cdot 3}=5\sqrt{3}$,

$|\vec{b}|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-6)^2+1^2}=\sqrt{4\cdot 3+36+1}=\sqrt{49}=7$;

$\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ имеет координаты: $\vec{c}$ $\{1; 1; 1\}$, $|\vec{c}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$.

$\vec{d}=-2\vec{k}$; $\vec{d}$ $\{0; 0; -2\}$, $\Rightarrow$ $|\vec{d}|=\sqrt{0^2+0^2+(-2)^2}=2$

$\vec{m}$ $\{1; -2; 0\}$, $|\vec{m}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+0}=\sqrt{5}$

428. $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2+z_1)^2}$,

т.к. если $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}$, то $\vec{d}=\{x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2\}$.

а) $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(3-2)^2+(-2+3)^2+(1+1)^2}=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$;

б) $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}$,

$|\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2}=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$, $|\vec{a}|+|\vec{b}|=\sqrt{14}+\sqrt{14}=2\sqrt{14}$,

в) $|\vec{a}|-|\vec{b}|=\sqrt{14}-\sqrt{14}=0$;

г) $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1+z_2)^2}$,

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(-2-3)^2+(3+2)^2+(1-1)^2}=\sqrt{25+25}+0=5\sqrt{2}$;

д) $|3\vec{c}|=\sqrt{(3x)^2+(3y)^2+(3z)^2}$, т.к. $3\vec{c}$ $\{3x; 3y; 3z\}$,

$|3\vec{c}|=\sqrt{(-3\cdot 3)^2+(2\cdot 3)^2+(1\cdot 3)^2}=\sqrt{9^2+6^2+3^2}=\sqrt{126}=\sqrt{9\cdot 14}=3\sqrt{14}$.

е) $\sqrt{14}\,|\vec{c}|=\sqrt{14}\cdot\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}\cdot\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}=14$;

ж) $2\vec{a}$ $\{6; -4; 2\}$, $3\vec{c}$ $\{-9; 6; 3\}$, $2\vec{a}-3\vec{c}=\vec{m}$,

$\vec{m}$ $\{6+9; -4-6; 2-3\}$, $\vec{m}$ $\{15; -10; -1\}$, $|\vec{m}|=\sqrt{15^2+(-10)^2+(1)^2}=$

$=\sqrt{225+100+1}=\sqrt{326}$.

429. Пусть K середина отрезка MN, тогда:

K $\left(\frac{x_M+x_N}{2}; \frac{y_M+y_N}{2}; \frac{z_M+z_N}{2}\right)$; K $\left(\frac{-4+0}{2}; \frac{7-1}{2}; \frac{0+2}{2}\right)$; K $(-2; 3; 1)$,

значит, OK $\{-2; 3; 1\}$ и $|OK|=\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2}=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$.

430. а) Чтобы найти периметр ΔABC, необходимо вычислить длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$. Периметр треугольника равен их сумме.

$|AB|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, AB $\{x_B-x_A, y_B-y_A; z_B-z_A\}$,

$|AB|=\sqrt{(2-\frac{3}{2})^2+(2-1)^2+(-3+2)^2}=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{2\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=1\frac{1}{2}$.

Аналогично $\vec{BC}$ $\{2-2; 0-2; -1+3\}$, $\vec{BC}$ $\{0; -2; 2\}$,

$|BC|=\sqrt{0^2+(-2)^2+2^2}=\sqrt{2\cdot 4}=2\sqrt{2}$;

$\vec{CA}$ $\{\frac{3}{2}-2; 1-0; -2+1\}$, $\vec{CA}$ $\{-\frac{1}{2}; 1; -1\}$,

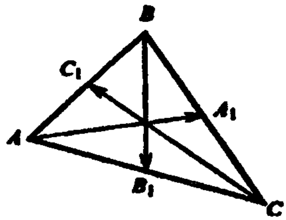
$|CA|=\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$.

$|AB|+|BC|+|CA|=1\frac{1}{2}+2\sqrt{2}+1\frac{1}{2}=3+2\sqrt{2}$.

б) AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы.

$\vec{AA_1}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$, $\vec{BB_1}=\frac{1}{2}(\vec{BA}+\vec{BC})$,

$\vec{CC_1}=\frac{1}{2}(\vec{CA}+\vec{CB})$;



$\vec{AB}$ $\{2-\frac{3}{2}; 2-1; -3+2\}$, $\vec{AB}$ $\{\frac{1}{2}; 1; -1\}$ и

$\vec{AC}$ $\{2-\frac{3}{2}; 0-1; -1+2\}$, $\vec{AC}$ $\{\frac{1}{2}; -1; 1\}$, следовательно

$\vec{AA_1}$ $\{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}); \frac{1}{2}(1-1); \frac{1}{2}(1-1)\}$, $\vec{AA_1}$ $\{\frac{1}{2}; 0; 0\}$,

$|AA_1|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+0+0}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}=0{,}5$; $\vec{BA}=-\vec{AB}$; $\vec{BA}$ $\{-\frac{1}{2}; -1; 1\}$;

$\vec{BC}$ $\{2-2; 0-2; -1+3\}$, $\vec{BC}$ $\{0; -2; 2\}$, следовательно

$\vec{BB_1}$ $\{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+0); \frac{1}{2}(-1-2); \frac{1}{2}(1+2)\}$, $\vec{BB_1}$ $\{-\frac{1}{4}; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\}$,

$|BB_1|=\sqrt{(-\frac{1}{4})^2+(-\frac{3}{2})^2+(\frac{3}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{73}{16}}=\frac{\sqrt{73}}{4}$.

$\vec{CA}=-\vec{AC}$; $\vec{CA}$ $\{-\frac{1}{2}; 1; -1\}$; $\vec{CB}=-\vec{BC}$; $\vec{CB}$ $\{0; 2; -2\}$, следовательно

$\vec{CC_1}$ $\{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+0); \frac{1}{2}(1+2); \frac{1}{2}(-1-2)\}$, $\vec{CC_1}$ $\{-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\}$ и

$|CC_1|=\sqrt{(\frac{1}{4})^2+(\frac{3}{2})^2+(-\frac{3}{2})^2}=\frac{\sqrt{73}}{4}=|BB_1|$.

431. Сравним длины сторон треугольника. Для этого по формуле расстояния между двумя точками $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ найдем $|AB|$, $|BC|$, $|AC|$. Если $a=b=c$, то треугольник ABC — равносторонний. Если:

c=b ≠ a, то треугольник равнобедренный, если нет одинаковых сторон: c ≠ b ≠ a, то есть если a > b ≥ c, то следует проверить, выполняется ли теорема Пифагора. Если да, то ΔABC — прямоугольный.

а) AB= $\sqrt{(9-2)^2+(3-10)^2+(-5+5)^2}=\sqrt{49+49+0}=\sqrt{2\cdot 49}=7\sqrt{2}$.

BC= $\sqrt{(2-2)^2+(10-3)^2+(-5-2)^2}=\sqrt{0+49+49}=\sqrt{2\cdot 49}=7\sqrt{2}$.

AC= $\sqrt{(9-2)^2+(3-3)^2+(-5-2)^2}=\sqrt{49+0+49}=7\sqrt{2}$.

AB=BC=AC, треугольник равносторонний.

б) AB= $\sqrt{(3-5)^2+(7+3)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{4+100+36}=\sqrt{140}$,

BC= $\sqrt{(5-1)^2+(-3-3)^2+(2+10)^2}=\sqrt{16+36+144}=\sqrt{196}$,

AC= $\sqrt{(3-1)^2+(7-3)^2+(-4+10)^2}=\sqrt{4+16+36}=\sqrt{56}$,

BC>AB>AC.

Проверим, выполняется ли равенство:

$BC^2=AC^2+AB^2$, $(\sqrt{196})^2=(\sqrt{56})^2+(\sqrt{140})^2$,

196=56+140=196 — верно. Следовательно, треугольник ABC — прямоугольный.

в) AB= $\sqrt{(5-5)^2+(3-5)^2+(1-1)^2}=\sqrt{0+4+0}=2$,

BC= $\sqrt{(5-4)^2+(-3+3)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$,

AC= $\sqrt{(5-4)^2+(-5+3)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$,

AC>AB>BC.

Проверим, выполняется ли равенство $AC^2=AB^2+BC^2$.

6=4+2 — выполняется. Следовательно , треугольник ABC — прямоугольный разносторонний.

г) AB= $\sqrt{(-5+4)^2+(2-3)^2+(0-0)^2}=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$,

BC= $\sqrt{(-4+5)^2+(3-2)^2+(0+2)^2}=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$,

AC= $\sqrt{(-5+5)^2+(2-2)^2+(0+2)^2}=\sqrt{0+0+4}=2$.

BC>AC>AB.

Проверим: $BC^2=AC^2+AB^2$, 6=4+2. Следовательно, треугольник ABC — прямоугольный равносторонний.

432. Дано: A (–3; 4; –4), Следовательно, точка A_1 — проекция точки A на Oxy — имеет координаты A_1 (–3; 4; 0),

A_2 — проекция точки A на Oyz — имеет координаты: A_2 (0; 4; –4), A_3 — проекция точки A на Oxz — имеет координаты: A_3 (–3; 0; –4). По формуле расстояния между двумя точками $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

Найдем $AA_1=\sqrt{0+0+4^2}=4$, $AA_2=\sqrt{3^2+0+0}=3$, $AA_3=\sqrt{0+4^2}=4$, таким образом для A (x; y; z) расстояниями до координатных плоскостей будут |x|, |y| и |z|.

б) На ось Ox проекция A_1 точки A имеет координаты A_1 (–3; 0; 0), на Oy A_2 (0; 4; 0), на Oz: A_3 (0; 0; –4).

$AA_1=\sqrt{0+4^2+4^2}=4\sqrt{2}$; $AA_2=\sqrt{3^2+0+4^2}=\sqrt{9+16}=5$; $AA_3=\sqrt{3^2+4^2}=5$

433. Искомая точка для каждой плоскости – это основание перпендикуляра, опущенного из данной точки A на соответствующую плоскость. Следовательно, искомые точки имеют координаты (0; 2; –3), (–1; 0; –3), (-1; 2; 0).

434. Наименьшее расстояние — это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на ось координат, то есть расстояние между точкой и ее проекцией на ось координат. Координатами про-екций точки на координатные оси будут абсцисса, ордината и аппликата этой точки. Следовательно, для B(3; –4; $\sqrt{7}$) проекция на ось Ox будет иметь координаты B_1 (3; 0; 0), на Oy: B_2 (0; –4; 0), на Oz: B_3 (0; 0; $\sqrt{7}$).

435. Найдем длины сторон ΔABC по формуле расстояния между двумя точками: $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$,

$$|AB|=\sqrt{(1+1)^2+(0-2)^2+(k-3)^2}=\sqrt{4+4+(k-3)^2}=\sqrt{8+(k-3)^2},$$

$$|BC|=\sqrt{(0+1)^2+(0-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3,$$

$$|AC|=\sqrt{(1-0)^2+(0-0)^2+(k-1)^2}=\sqrt{1+(k-1)^2}.$$

Треугольник будет равнобедренным, если будет выполнено одно из трех условий: 1) AB=BC, или 2) AB=AC, или 3) AC=BC.

1) $\sqrt{8+(k-3)^2}=3$,

$8+(k-3)^2=9$,

$(k-3)^2=1$,

$\left[\begin{array}{ll} k-3=1, & k=4, \\ k-3=-1, & k=2. \end{array}\right.$

2) $\sqrt{8+(k-3)^2}=\sqrt{1+(k-1)^2}$,

$8+(k-3)^2=1+(k-1)^2$,

$8+k^2+9-6k=1+k^2-2k+1$,

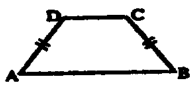
$17-2=4k$

$15=4k$, $\quad k=\frac{15}{4}=3{,}75$.

3) $\sqrt{1+(k-1)^2}=3$

$1+(k-1)^2=9$, $(k-1)^2=8$, $k-1=2\sqrt{2}$, $k=2\sqrt{2}+1$, $k-1=-2\sqrt{2}$, $k=1-2\sqrt{2}$.

436. По формуле расстояния между двумя точками вычислим длины сторон трапеции A BCD:



$$AB=\sqrt{(4-0)^2+(4-0)^2+0}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2},$$

$$BC=\sqrt{0+(3-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5,$$

$$CD=\sqrt{(1-0)^2+(4-3)^2+(4-4)^2}=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2},$$

$$DA=\sqrt{(4-0)^2+(4-4)^2+(0-4)^2}=\sqrt{9+0+16}=5.$$

$|AD|=|CB|=5$, следовательно, ABCD будет равнобедренной трапецией, если доказать. что $DC \parallel AB$, то есть, что DC и AB коллинеарны.

Если существует число k такое, что $\vec{b}=k\vec{a}$ и $\vec{a}\neq 0$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

$AB\{-4; -4; 0\}$, $CD\{1; 1; 0\}$.

Очевидно, что $AB=-4CD$, т. е. AB и CD коллинеарны. значит, $AB \parallel CD$ и ABCD — равнобедренная трапеция.

437. Расстояние между двумя точками

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$:

а) Пусть С (x; 0; 0) — точка на оси Ох, равноудаленная от точек А и В. Следовательно, СА=СВ, или в координатах:

$$\sqrt{(-2-x)^2+(3-0)^2+(5-0)^2}=\sqrt{(3-x)^2+(2-0)^2+(-3-0)^2},$$

$$\sqrt{4+4x+x^2+9+25}=\sqrt{9-6x+x^2+4+9},$$

$$\sqrt{x^2+4x+38}=\sqrt{x^2-6x+22}$$

$x^2+4x+38=x^2-6x+22$, $\quad 10x=-16, x=-1{,}6$; С (–1,6; 0; 0).

Равноудаленной от точек А и В будет точка С (–1,6; 0; 0).

б) Пусть D (0; y, 0) — точка на оси Оу, равноудаленная от А и В. AD=DB.

$$\sqrt{(-2-0)^2+(3-y)^2+(5-0)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(2-y)^2+(-3-0)^2}$$

$$\sqrt{4+9-6y+y^2+25}=\sqrt{9+4-4y+y^2+9},$$

$$\sqrt{y^2-6y+38}=\sqrt{y^2-4y+22}$$

$y^2-6y+38=y^2-4y+22$ $\quad 2y=16$, $\quad y=8$; D (0; 8; 0).

в) Пусть Е (0; 0; z) —точка на оси Oz, равноудаленная от А и В.

$$\sqrt{(-2-0)^2+(3-0)^2+(5-z)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(2-0)^2+(-3-z)^2}$$

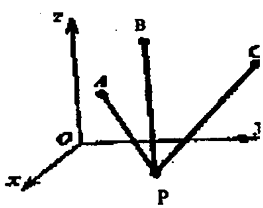
$$\sqrt{4+9+25-10z+z^2}=\sqrt{9+4+9+6z+z^2},$$

$$\sqrt{z^2-10z+38}=\sqrt{z^2+6z+22}$$

$z^2-10z+38=z^2+6z+22$, $\quad 16z=16$, $\quad z=1$; Е (0; 0; 1).

438. а) Пусть на плоскости Оху точка Р (x; y; 0) равноудалена от А, В и С. Используя формулу

$d=\sqrt{x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, составим систему уравнений: $\begin{cases} AP=BP, \\ AP=CP \end{cases}$



$AP=\sqrt{(-1-x)^2+(2-y)^2+(3-0)^2}=$

$=\sqrt{1+2x+x^2+4-4y+ey+9}=\sqrt{x^2+y^2+2x-4y+14}$,

$BP=\sqrt{(-2-x)^2+(1-y)^2+(2-0)^2}=\sqrt{4+4x+x^2+1-2y+y^2+4}=$

$=\sqrt{x^2+y^2+4x-2y+9}$,

$CP=\sqrt{(0-x)^2+(-1-y)^2+(2-0)^2}=\sqrt{x^2+1+2y+y^2+1}=$

$=\sqrt{x^2+y^2+2y+2}$,

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+2x-4y+14}=\sqrt{x^2+y^2+4x-2y+9},\\ \sqrt{x^2+y^2+2x-4y+14}=\sqrt{x^2+y^2+2y+2},\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2+2x-4y+14=x^2+y^2+4x-2y+9,\\ x^2+y^2+2x-4y+14=x^2+y^2+2y+2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+2y=5\\ 6y=2x+12\end{cases};\quad \begin{cases}y=2+\frac{1}{3}x\\ 2x+2(2+\frac{1}{3}x)=5\end{cases};\quad \begin{cases}y=2+\frac{1}{3}x\\ 2x+4+\frac{2}{3}x=5\end{cases};$$

$$\begin{cases}y=2+\frac{1}{3}x\\ 2\frac{2}{3}x=1\end{cases};\quad \begin{cases}\frac{8}{3}x=1\\ y=2+\frac{1}{3}x\end{cases};\quad \begin{cases}x=\frac{3}{8}\\ y=2+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}\end{cases};\quad \begin{cases}x=\frac{3}{8}\\ y=2\frac{1}{8}=\frac{17}{8}\end{cases}.$$

Точка P ($\frac{3}{8}$; $\frac{17}{8}$; 0) лежит на плоскости Oxy и равноудалена от точек A, B и C.

б) Пусть на координатной плоскости Oyz точка Q (0; y; z) равноудалена от A, B и C, следовательно

$$\begin{cases}AQ=BQ,\\ AQ=CQ\end{cases}$$ (очевидно, что и BQ=CQ).

$AQ=\sqrt{(-1-0)^2+(2-y)^2+(3-z)^2}=\sqrt{1+4-4y+y^2+9-6z+z^2}=$

$=\sqrt{y^2+z^2-4y-6z+14}$,

$BQ=\sqrt{(-2-0)^2+(1-y)^2+(2-z)^2}=\sqrt{4+1-2y+y^2+4-4z+z^2}=$

$=\sqrt{y^2+z^2-2y-4z+9}$,

$CQ=\sqrt{(0-0)^2+(-1-y)^2+(1-z)^2}=\sqrt{0+1+2y+y^2+4-4z+z^2}=$

$=\sqrt{y^2+z^2+2y-2z+2}$.

$$\begin{cases}\sqrt{y^2+z^2-4y-6z+14}=\sqrt{y^2+z^2-2y-4z+9},\\ \sqrt{y^2+z^2-4y-6z+14}=\sqrt{y^2+z^2+2y-2z+2},\end{cases}$$

$$\begin{cases}y^2+z^2-4y-6z+14=y^2+z^2-2y-4z+9,\\ y^2+z^2-4y-6z+14=y^2+z^2+2y-2z+2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}2y+2z=5\\ 6y+4z=12\end{cases};\quad \begin{cases}y=\frac{5}{2}-z\\ \frac{6\cdot 5}{2}-6z+4z=12\end{cases};\quad \begin{cases}y=\frac{5}{2}-z;\\ 2z=3\end{cases}\quad z=\frac{3}{2};\quad y=1$$

$Q\left(0;\ 1;\ \frac{3}{2}\right)$.

в) Пусть на координатной плоскости Ozx точка R (x, 0; z) равноудалена от точек A, B и C, следовательно

$$\begin{cases} AR = BR, \\ AR = CR \end{cases}$$

$$AR=\sqrt{(-1-x)^2+(2-0)^2+(3-z)^2}=$$

$$=\sqrt{1+2x+x^2+4+9-6z+z^2}=\sqrt{x^2+z^2+2x-6z+14},$$

$$BR=\sqrt{(-2-x)^2+(1-0)^2+(2-z)^2}=$$

$$=\sqrt{4+4x+x^2+1+4-4z+z^2}=\sqrt{x^2+z^2+4x-4z+9},$$

$$CR=\sqrt{(0-x)^2+(-1-0)^2+(1-z)^2}=$$

$$=\sqrt{x^2+1+1-2z+z^2}=\sqrt{x^2+z^2-2z+2},$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+z^2+2x-6z+14}=\sqrt{x^2+z^2+4x-4z+9}, \\ \sqrt{x^2+z^2+2x-6z+14}=\sqrt{x^2+z^2-2z+2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+z^2+2x-6z+14=x^2+z^2+4x-4z+9, \\ x^2+z^2+2x-6z+14=x^2+z^2-2z+2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+2z=5, \\ 2x=4z-12, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2z-5, \\ 4z-12+2z=5, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2z-6, \\ 6z=17, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=\frac{17}{6}, \\ x=\frac{17}{3}-6=-\frac{1}{3}; \end{cases} \qquad R\left(-\frac{1}{3};\ 0;\ \frac{17}{6}\right).$$

439. а) Пусть точка R — центр окружности, описанной около ΔAOB, следовательно

$$\begin{cases} AR = BR = r, \\ AR = OR = r \end{cases}$$ где r — радиус окружности;

Точки A, O, B и R лежат в одной плоскости.

Точка O (0; 0; 0) совпадает с началом координат, A (4; 0; 0) лежит на оси Ox; B (0; 6; 0) лежит на оси Oy, следовательно, ΔAOB лежит в координатной плоскости Oxy, тогда, центр описанной окружности лежит в той же плоскости. Следовательно, координаты центра: R (x; y; 0). По формуле расстояния между двумя точками:

$$AR=\sqrt{(4-x)^2+(0-y)^2+(0-0)^2}=\sqrt{16-8x+x^2+y^2},$$

$$BR=\sqrt{(0-x)^2+(6-y)^2+(0-0)^2}=\sqrt{x^2+36-12y+y^2},$$

$$OR=\sqrt{(0-x)^2+(0-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Можем записать систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{16+x^2+y^2-8x}=\sqrt{x^2+y^2-12y+36}\\ \sqrt{16+x^2+y^2-8x}=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases};$$

$$\begin{cases}x^2+y^2-8x+16=x^2+y^2-12y+36\\ x^2+y^2-8x+16=x^2+y^2\end{cases},\ \begin{cases}8x=12y-20\\ 8x=16\end{cases},\ \begin{cases}x=2\\ y=\frac{36}{12}=3\end{cases};$$

Координаты центра окружности, описанной около ΔAOB: R (2; 3; 0). Радиус описанной окружности равен AR=BR=OR=r,

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

б) Если точка R (x; y; z) равноудалена от вершин тетраэдра OABC, то

$$\begin{cases}OR=AR\\ AR=BR\\ BR=CR\end{cases}$$

$OR=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

$AR=\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2-8x+16+y^2+z^2}$,

$BR=\sqrt{(x-0)^2+(y-6)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2-12y+36+z^2}$,

$CR=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z+2)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2+4z+4}$.

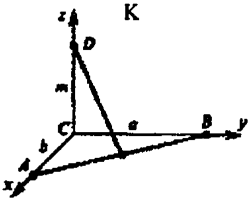
Можем записать систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2-8x+y^2+z^2+16}\\ \sqrt{x^2-8x+y^2+z^2+16}=\sqrt{x^2+y^2-12y+z^2+36}\\ \sqrt{x^2+y^2-12y+z^2+36}=\sqrt{x^2+y^2+z^2+4z+4}\end{cases};$$

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=x^2-8x+y^2+z^2+16\\ x^2-8x+y^2+z^2+16=x^2+y^2-12y+z^2+36\\ x^2+y^2-12y+z^2+36=x^2+y^2+z^2+4z+4\end{cases};$$

$$\begin{cases}8x=16\\ 12y=8x+20\\ 12y+4z=32\end{cases},\ \begin{cases}x=2\\ 12y=36\\ 36+4z=32\end{cases};\ \begin{cases}x=2\\ y=3\\ z=-1\end{cases}.$$

440. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке C и с осями: Ox — по отрезку CA, Oy — по отрезку CB, тогда точка D будет лежать на оси Oz. Пусть точка K — середина AB. Во введенной системе координат A (b; 0; 0), B (0; a; 0), C (0; 0; 0), D (0; 0; m).



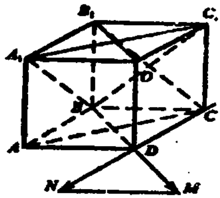
Точка K $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$, Подставляя координаты точек A и B, получим: $K\left(\frac{b}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$

Следовательно:

$$|DK| = \sqrt{\left(\frac{b}{2}-0\right)^2+\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+(0-m)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{4}+m^2}.$$

441. Сделаем рисунок.

а) Векторы $\vec{BB_1}$ и $\vec{B_1C}$ совпадают с катетом и гипотенузой прямоугольного треугольника BB_1C, следовательно, $B_1B_1C=45°$.



б) $\vec{BD}=\vec{B_1D_1}$, т.к. они сонаправлены и имеют одинаковую длину. $\vec{BD}=\vec{B_1D_1}=-\vec{DB}$.

Угол между $\vec{DB}$ и $\vec{DA}$ — угол между стороной и диагональю квадрата, т. е. $\alpha=45°$. Тогда угол между $\vec{DA}$ и $\vec{B_1D_1}$ равен 135°.

$\vec{DA}\ \wedge\ \vec{DB}=135°=\vec{DA}\ \wedge\ \vec{B_1D_1}$.

в) $\vec{A_1C_1}$ и $\vec{A_1B}$ совпадают со сторонами равностороннего треугольника ABC и отложены из одной точки. Следовательно, угол 60°.

г) $\vec{BC}=\vec{AD}$; $\vec{BC}\ \wedge\ \vec{AC}=\vec{AC}\ \wedge\ \vec{AD}=45°$ (угол между стороной и диагональю квадрата).

д) $\vec{BB_1}=\vec{AA_1}$, $\vec{BB_1}\ \wedge\ \vec{AC}=\vec{AA_1}\ \wedge\ \vec{AC}=90°$.

е) AD_1 — BC_1. Пусть O — точка пересечения диагоналей B_1C и BC_1, квадрата BB_1C_1C. $BC_1=2OC_1$; $B_1C_1=2OC$, следовательно,

$\vec{BC_1}\ \wedge\ \vec{B_1C}=\vec{OC_1}\ \wedge\ \vec{O_1C}=90°$.

ж) $\vec{A_1D_1}=\vec{BC}$, следовательно, $\vec{A_1D_1}\ \wedge\ \vec{BC}=0°$.

з) $\vec{AA_1}=-\vec{C_1C}$, следовательно, угол между ними равен 180°.

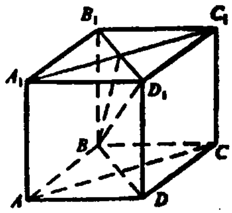
442. Угол $\vec{AB}\ \wedge\ \vec{CD}=\varphi$, тогда угол между векторами (1) $\vec{BA}$ и $\vec{DC}$ равен φ, (2) $\vec{BA}$ и $\vec{CD}$ равен $180^0-\varphi$, (3) $\vec{AB}$ и $\vec{DC}$ равен $180^0-\varphi$.

Отложим вектора $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ от одной точки и построим векторы $\vec{BA}$, $\vec{DC}$.

Тогда в случае (1) углы между векторами $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ и $\vec{BA}$ и $\vec{DC}$ равны как вертикальные; в случаях (2) и (3) углы вычисляются как смежные.

443. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b})$.

а) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=|\overrightarrow{AD}|\ |\overrightarrow{B_1C_1}|\cdot\cos(\overrightarrow{AD}\ \hat{}\ \overrightarrow{B_1C_1})=a^2$,



Т.к. $\cos(\overrightarrow{AD}\ \hat{}\ \overrightarrow{B_1C_1})=1$ и $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{B_1C_1}|$

б) $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{C_1A_1}$, $\cos(\overrightarrow{AC}\ \hat{}\ \overrightarrow{C_1A_1})=\cos 180°=-1$,

$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{C_1A_1}|=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{C_1A_1}=\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{2a^2}\cdot(-1)=-2a^2$.

в) $D_1B\perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах),

$\cos(\overrightarrow{D_1B}\ \hat{}\ \overrightarrow{AC})=\cos 90°=0$, $\overrightarrow{D_1B}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

г) $\overrightarrow{BA_1}$ совпадает с диагональю грани куба, как и $\overrightarrow{BC_1}$.

$|\overrightarrow{BA_1}|=|\overrightarrow{BC_1}|=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$

ΔBA_1C_1 — равносторонний, $\angle A_1BC_1=60°=\overrightarrow{BA_1}\ \hat{}\ \overrightarrow{BC_1}$, $\cos 60°=\frac{1}{2}$,

$\overrightarrow{BA_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=|\overrightarrow{BA_1}|=|\overrightarrow{BC_1}|\cdot\cos(\overrightarrow{BA_1}\ \hat{}\ \overrightarrow{BC_1})=\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{2a^2}\cdot\frac{1}{2}=a^2$.

д) $\overrightarrow{A_1O_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1C_1}$, $\cos(\overrightarrow{A_1O_1}\ \hat{}\ \overrightarrow{A_1C_1})=\cos 0=1$,

$|\overrightarrow{A_1O_1}|=|\overrightarrow{A_1C_1}|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2a^2}$, $\overrightarrow{A_1O_1}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=\sqrt{2a^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2a^2}\cdot 1=a^2$

е) $\overrightarrow{D_1O_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1B_1}$. $\overrightarrow{B_1O_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1D_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1B_1}=-\overrightarrow{D_1O_1}$.

$\overrightarrow{D_1O_1}\ \hat{}\ \overrightarrow{B_1O_1}=180°$, $\cos 180°=-1$, $|\overrightarrow{D_1O_1}|=|\overrightarrow{B_1O_1}|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2a^2}$,

$\overrightarrow{D_1O_1}\cdot\overrightarrow{B_1O_1}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2a^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2a^2}\cdot(-1)=\frac{1}{4}\cdot 2a^2\cdot(-1)=-\frac{1}{2}a^2$.

ж) $\overrightarrow{BO_1}$ совпадает с гипотенузой прямоугольного ΔBB_1O_1, у которого катеты: $|\overrightarrow{BB_1}|=a$, $|\overrightarrow{B_1O_1}|=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2}$,

$|\overrightarrow{BO_1}|=\sqrt{a^2+\frac{1}{4}\cdot 2a^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}\,a$, $|\overrightarrow{C_1B}|=\sqrt{2a^2}$,

$\overrightarrow{BO_1}\ \hat{}\ \overrightarrow{C_1B}=180°-(\overrightarrow{BO_1}\ \hat{}\ \overrightarrow{BC_1})=180°-\angle O_1BC_1$.

$\angle O_1BC_1=\frac{1}{2}\angle A_1BC_1=\frac{1}{2}\cdot 60°=30°$, т.к. ΔBA_1C_1 — равносторонний

$\vec{BO_1}\ \vec{C_1B}=|\vec{BO_1}|\cdot|\vec{C_1B}|\cdot\cos 150°=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot a\cdot\sqrt{2a^2}\cdot(-\frac{3}{2})=$

$=a\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot(-\frac{3}{2})=a^2\cdot(-\frac{3}{2})\cdot\sqrt{3}=-\frac{3}{2}a^2.$

444. Пусть $\vec{a}\{x_1, y_1; z_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$, тогда $\vec{a}\ \vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$, тогда $\vec{a}\ \vec{c}=1\cdot5+(-1)\cdot6+2\cdot2=5-6+4=3$,

$\vec{a}\ \vec{b}=-1-1+2=0$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=-5+6+2=3$, $\vec{a}\cdot\vec{a}=1+1+4=6$, $\sqrt{\vec{b}\vec{b}}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$

445. $\vec{a}\{3; -5; 1\}$, $\vec{b}\{0;1;-5\}$.

а) $\vec{a}\ \vec{b}=3\cdot0-5\cdot1-5\cdot1=-10$;

б) $\vec{i}\{1, 0; 0\}$, $\vec{a}\ \vec{i}=3\cdot1-5\cdot0+1\cdot0=3$;

в) $\vec{j}\{0; 1; 0\}$, $\vec{b}\ \vec{j}=0\cdot0+1\cdot1-5\cdot0=1$;

г) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{k}=\vec{a}\ \vec{k}+\vec{b}\cdot\vec{k}$, $\vec{k}\{0; 0; 1\}$,

$(\vec{a}+\vec{b})\vec{k}=0\cdot3+0\cdot(-5)+1\cdot1+0\cdot0+1\cdot0-5\cdot1=1-5=-4$;

д) $(\vec{a}-2\vec{b})(\vec{k}+\vec{i}-2\vec{j})=\vec{a}\cdot\vec{k}+\vec{a}\cdot\vec{i}-2\vec{a}\cdot\vec{j}-\vec{b}\cdot\vec{k}-2\vec{b}\cdot\vec{i}+4\vec{b}\cdot\vec{j}=(3\cdot0-5\cdot0+1-1)+(3\cdot1-5\cdot0+1\cdot0)-2(3\cdot0-5\cdot1+1\cdot0)-2(0\cdot0+1\cdot0-5\cdot1)-2(0\cdot1+1\cdot0-5\cdot0)+4(0\cdot0+1\cdot1-5\cdot0)=1+3+10+10+4=28$.

446. $\cos\alpha=\frac{x_1\ x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$, далее если $0<\alpha<90°$ (острый угол), то $\cos\alpha>0$, если $\cos\alpha=0$, то $\alpha=90°$, если $90°<\alpha<180°$, то $\cos\alpha<0$.

$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\ \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}>0$ для любых векторов, отличных от нулевого. Тогда знак $\cos\alpha$ совпадает со знаком числителя.

а) $\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})<0$, т.к. $3\cdot(-5)+(-1)\cdot1+(0\cdot1)=-15-1=-16<0$, следовательно, угол тупой;

б) $\cos(\vec{b}\wedge\vec{c})>0$, т.к. $-5\cdot(-1)+1\cdot(-2)+0\cdot1=5\text{-}2=3>0$, следовательно, угол острый;

в) $\cos(\vec{a}\wedge\vec{c})=0$, т.к. $3\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)+(1\cdot1)=-3+2+1=0$, следовательно, угол прямой

447. $\vec{i}\{1, 0; 0\}$, $\vec{j}\{0; 1; 0\}$; $\vec{k}\{0; 0; 1\}$.

$\cos\alpha=\frac{x_1\ x_2+y_1\ y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\ \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ знак $\cos\alpha$ зависит от знака числителя

а) Если $\cos(\vec{a}\wedge\vec{i})>0$, то $\vec{a}\ \vec{i}<90°$. Докажем это.

$x_1 \cdot x_2+y_1 \cdot y_2+z_1 \cdot z_2=3 \cdot 3+(-5) \cdot 0+0 \cdot 0=3$, $3>0$, следовательно, все выражение положительное. $\cos(\vec{a} \wedge \vec{i})>0$, $\vec{a}\ \vec{i}<90°$.

б) Если $\cos(\vec{a} \wedge \vec{j})<0$, то $\vec{a}\ \vec{j}>90°$. Докажем это.

$x_1 \cdot x_2+y_1 \cdot y_2+z_1 \cdot z_2=3 \cdot 0+(-5) \cdot 1+(0 \cdot 0)=-5$, $-5<0$, следовательно, все выражение отрицательно. $\cos(\vec{a} \wedge \vec{j})<0$, $\vec{a}\ \vec{j}>90°$.

в) $\vec{a} \cdot \vec{k}=90°$, когда $\cos(\vec{a} \wedge \vec{k})=0$. $\cos\alpha=0$, если числитель равен нулю

$x_1 \cdot x_2+y_1 \cdot y_2+z_1 \cdot z_2=3 \cdot 0+(-5) \cdot 0+0 \cdot 1=0$, следовательно, $\cos(\vec{a} \wedge \vec{k})=0$, $\vec{a}\ \vec{k}=90°$

448. $\vec{a} \cdot \vec{b}=x_1 \cdot x_2+y_1 \cdot y_2+z_1 \cdot z_2$.

а) $\vec{a} \cdot \vec{b}=-1 \cdot 5+2x-3 \cdot 1=2x-8$.

По условию задачи: $2x-8=3$, $2x=11$, $x=5\frac{1}{2}=5{,}5$;

б) $\vec{a} \cdot \vec{b}=2x-8=-1$, $2x=7$, $x=3{,}5$;

в) $\vec{a} \perp \vec{b}=|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, когда $\cos\vec{a}\ \vec{b}=0$, тогда,

$\vec{a}\ \vec{b}=|\vec{a}| \cdot \vec{b}|\cos(\vec{a}\ \vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$, $-1 \cdot 5+2x-3 \cdot 1=2x-8=0$, $x=4$

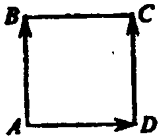
449. $\vec{a}\{m; 3; 4\}$; $\vec{b}\{4; m; -7\}$,

Векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\ \vec{b}=0$

$\vec{a}\ \vec{b}=4m+3m-28=0$, $7m=28$, $m=4$.

450. Докажем, что $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}=0$, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(\sqrt{2}-0)^2+(1-1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{2}$$



$$|\overrightarrow{DC}|=\sqrt{(\sqrt{2}-0)^2+(1-1)^2+(2-2)^2}=\sqrt{2}.$$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$ аналогично. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}=(2\text{-}1) \cdot 0+0 \cdot 1+0 \cdot (-1)=0$

Таким образом, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}$,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}=0$, следовательно, ABCD — квадрат.

451. Применим формулу: $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})=\dfrac{x_1 \cdot x_2+y_1 \cdot y_2+z_1\ z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

а) $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})=\dfrac{2 \cdot 3+(-2) \cdot 0+0 \cdot (-3)}{\sqrt{4+4+0} \cdot \sqrt{9+0+9}}=\dfrac{6}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}}=\dfrac{6}{2\sqrt{2}\ 3\sqrt{2}}=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$,

$\vec{a} \wedge \vec{b}=60°$;

б) $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})=\dfrac{\sqrt{2}\cdot(-3)+\sqrt{2}\cdot(-3)+0\cdot 2}{\sqrt{2+2+4}\cdot\sqrt{9+9+0}}=\dfrac{-6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos \vec{a} \wedge \vec{b}<0$, значит, это тупой угол, $\vec{a} \wedge \vec{b}=180°-45°=135°$;

в) $\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})=\dfrac{0\cdot 0+5\cdot(-\sqrt{3})+0\cdot 1}{\sqrt{0+25+0}\cdot\sqrt{0+3+1}}=\dfrac{-5\cdot\sqrt{3}}{5\cdot 2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b})<0$, значит, угол тупой, $\vec{a} \wedge \vec{b}=180°-30°=150°$:

г) аналогично, воспользовавшись формулой, получим $\vec{a} \wedge \vec{b}=45°$

452. $\vec{i}\,\{1;0;0\}$, $\vec{j}\,\{0;1;0\}$, $\vec{k}\,\{0;0;1\}$. Воспользуемся формулой (см. 451):

$\cos(\vec{a} \wedge \vec{i})=\dfrac{2\cdot 1+0+0}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{1+0+0}}=\dfrac{2}{3\cdot 1}=\dfrac{2}{3}$; $\vec{a} \wedge \vec{i}=50°\,46'$;

$\cos(\vec{a} \wedge \vec{j})=\dfrac{2\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 0}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{1}}=\dfrac{1}{3}$; $\vec{a} \wedge \vec{j}=63°\,26'$;

$\cos(\vec{a} \wedge \vec{k})=\dfrac{2\cdot 0+1\cdot 0+2\cdot 1}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{1}}=\dfrac{2}{3}$; $\vec{a} \wedge \vec{k}=50°\,46'$

453. $\overrightarrow{CA}\,\{1-1;\,3-2;\,0+1\}$, $\overrightarrow{CA}\,\{0;\,1;\,1\}$,

$\overrightarrow{CB}\,\{2-1;\,3-2;\,-1+1\}$, $\overrightarrow{CB}\,\{1;\,1;\,0\}$;

$\cos(\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB})=\dfrac{0+1+0}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$, $\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}=60°$.

454. $\cos\alpha=\dfrac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

$\overrightarrow{AB}\,\{3-1;\,-1+1;\,1-3\}$. $\overrightarrow{AB}\,\{2;\,0;\,-2\}$, $\overrightarrow{BA}\,\{-2;\,0;\,2\}$,

$\overrightarrow{AC}\,\{-1-1;\,1+1;\,3-3\}$, $\overrightarrow{AC}\,\{-2;\,2;\,0\}$, $\overrightarrow{CA}\,\{2;\,-2;\,0\}$;

$\overrightarrow{BC}\,\{-1-3;\,1+1;\,3-1\}$. $\overrightarrow{BC}\,\{-4;\,2;\,2\}$, $\overrightarrow{CB}\,\{4;\,-2;\,-2\}$.

$\cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})=\dfrac{-4+0+0}{\sqrt{4+4}\cdot\sqrt{4+4}}=-\dfrac{4}{8}=-\dfrac{1}{2}$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}=180°-60°=120°$.

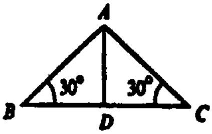
$\cos(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC})=\dfrac{-2(-4)+0\ \ 2+2\cdot 2}{\sqrt{4+0+4}\cdot\sqrt{16+4+4}}=\dfrac{8+4}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{12}{4\cdot 2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}=30°$;

$\cos(\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}) = \dfrac{2\cdot 4+(-2)\ (-2)+0\cdot(-2)}{\sqrt{4+4}\cdot\sqrt{16+4+4}} = \dfrac{8+4}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = 30°$, следовательно, углы при основании равны. ABC — равнобедренный.

Вычислим |BC| и |AB| (|AB| – |AC|): $|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.



$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$,

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$,

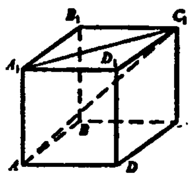
$P = |\overrightarrow{BC}| + 2|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} + 2\cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\,(2+\sqrt{3})$.

Вычислим площадь ΔABC: $S = \frac{1}{2}BC\cdot AD$, где $AD \perp BC$.

Точка D — середина отрезка BC, т.к. ΔABC — равнобедренный.
Тогда D (1;0:2).

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(1-1)^2+(-1-0)^2+(3-2)^2} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$

Следовательно, $S = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{3}$.



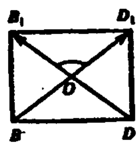
455. Пусть сторона куба равна a, следовательно:

а) В прямоугольном треугольнике AA_1C_1 положим, $AA_1 = 0$, тогда $A_1C_1 = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$ по теореме Пифагора.

$|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{a^2+(a\sqrt{2})^2} = \sqrt{a^2+2a^2} = \sqrt{3}$,

$\cos(\overrightarrow{AA_1} \wedge \overrightarrow{AC_1}) = \cos\angle A_1AC_1 = \dfrac{AA_1}{A_{,,1}} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

б) Векторы $|\overrightarrow{BD_1}|$ и $|\overrightarrow{DB_1}|$ лежат в плоскости BB_1D, сечение куба этой плоскостью — это прямоугольник BB_1D_1D со сторонами a и $a\sqrt{2}$



$\overrightarrow{BD_1} \wedge \overrightarrow{DB_1} = \angle B_1OD_1$.

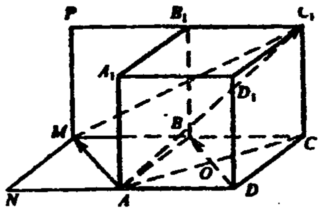
По теореме косинусов в Δ $B_1ÎD_1$:

$|\overrightarrow{B_1D_1}|^2 = |\overrightarrow{OB_1}|^2 + |\overrightarrow{OD_1}|^2 - 2|\overrightarrow{OB_1}|\cdot|\overrightarrow{OD_1}|\cos\angle B_1OD_1$.

$|\overrightarrow{OB_1}| = |\overrightarrow{OD_1}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{DB_1}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC_1}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $|\overrightarrow{B_1D_1}| = |\overrightarrow{A_1C_1}| = a\sqrt{2}$, следовательно

$$\cos\angle B_1OD_1 = \frac{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2-(a\sqrt{2})^2}{2\ (\frac{a\sqrt{3}}{2})\cdot(\frac{a\sqrt{3}}{2})} = \frac{|\overrightarrow{OB_1}|^2+|\overrightarrow{OD_1}|^2-|\overrightarrow{B_1D_1}|^2}{2OB_1\cdot OD_1} =$$

$$=\frac{\frac{a^2 3}{4}+\frac{a^2\cdot 3}{4}-2a^2}{\frac{3}{2}a^2}=\frac{\frac{3}{2}a^2-2a^2}{\frac{3}{2}a^2}=1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}.$$



в) $C_1C \perp BD$, $AC \perp BD$ (по свойству диагонали квадрата).

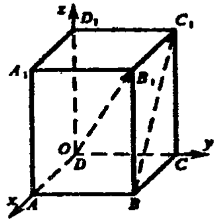
Следовательно, BD перпендикулярно плоскости AC_1C, тогда, $BD \perp AC_1$,

$\cos(\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{AC_1})=\cos 90°=0.$

456. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке D. Тогда, координаты вершин прямоугольного параллелепипеда:

A (2;0;0); A_1(2;0;2); B (2;1;0); B_1 (2;1;2); C(0;1;0); C_1 (0;1;2);
D (0;0;0); D_1 (0;0;2).

$$\cos\alpha=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$



где $\vec{a} \wedge \vec{b}=\alpha$, $\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}$; $\vec{a}\neq 0$; $\vec{b}\neq 0$.

$\overrightarrow{DB}$ {2; 1; 2}, а это координаты точки B_1.

$\overrightarrow{BC_1}$ {0–2;1–1;2–0), $\overrightarrow{BC_1}$ {–2;0;2}.

$$\cos(\overrightarrow{DB_1} \wedge \overrightarrow{BC_1})=\frac{2\cdot(-2)+1\cdot 0+2\cdot 2}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{4+0+4}}=\frac{-4+4}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{8}}=0$$

$\overrightarrow{DB_1} \wedge \overrightarrow{BC_1}=90°.$

457. $(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}=\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}$ (распределительный закон);

$\vec{a}\,\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cos(\vec{a} \wedge \vec{c})=1\cdot 2\cos 60°=2\cdot\frac{1}{2}=1;$

$\vec{b}\,\vec{c}=|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos(\vec{b} \wedge \vec{c})=2\cdot 2\cos 60°=2;$

$(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}=1+2=3.$

458. см.учебник.

459. а) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})(2\vec{b})=((\vec{a}+\vec{b})+\vec{c})(2\vec{b})=(\vec{a}+\vec{b})2\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}=2\vec{b}\cdot\vec{a}+$

$+2\vec{b}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\,\vec{c}=2|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos 120°+2|\vec{b}|\cdot|\vec{b}|\cos 0°+2|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos 90°=2\cdot 1\cdot 1\cdot(-\frac{1}{2})+$

$+2\cdot 1\cdot 1\cdot 1+0=-1+2=1;$

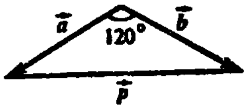
$(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})(\vec{a}-\vec{c})=\vec{a}\,\vec{a}-\vec{a}\,\vec{b}+\vec{a}\,\vec{c}-\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}-\vec{c}\,\vec{c}=\vec{a}\,\vec{a}-\vec{a}\,\vec{b}-\vec{c}\,\vec{c}+$

$+\vec{b}\,\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}\cdot|$

$\cos 0°-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 120°-|\vec{c}|\cdot|\vec{c}|\cos 0°+|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos 90°=1\frac{1}{2}-1+0=\frac{1}{2};$

б) $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{p}|$, где по теореме косинусов

$$\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})}=\sqrt{1+1-2\cdot(-\frac{1}{2})}=\sqrt{3}$$



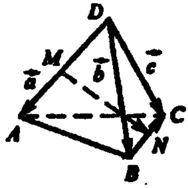
$|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=|\vec{d}|$.

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(180°-\vec{a}\wedge\vec{b}\right)^2}=\sqrt{1+1-1}=1$$

$|\vec{d}|^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$, следовательно, $|\vec{d}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

460. см.учебник.

461. Пусть $\vec{DA}=\vec{a}$; $\vec{DB}=\vec{b}$, $\vec{DC}=\vec{c}$; $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{c}=\vec{a}\,\vec{c}=60°$.



Выразим $\vec{MN}$ и $\vec{BC}$ через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$\vec{BC}=\vec{c}-\vec{b},\ \vec{MN}=\vec{MD}+\vec{DB}+\vec{BN}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+$$

$$+\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}),$$

$$\vec{MN}\cdot\vec{AD}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a}+\vec{c})(-\vec{a})=-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}=$$

$$=-\frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 60°+\frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0°-\frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cos 60°=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0.$$

$$\vec{MN}\cdot\vec{BC}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a}+\vec{c})(\vec{c}-\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{b}\,\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\,\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{c}^{\,2}-\frac{1}{2}\vec{b}^{\,2}+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}$$

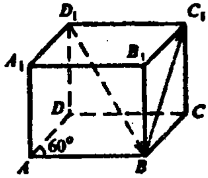
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}(\vec{c}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}+\vec{a}\,\vec{b}-\vec{a}\,\vec{c})=\frac{1}{2}\cdot 0=0,$$ т.к. $\vec{c}^{\,2}=|\vec{c}|\cdot|\vec{c}|\cdot 1=\vec{b}^{\,2}=|\vec{b}|\cdot|\vec{b}|\cdot 1$,

т.к. $|\vec{c}|=|\vec{b}|$ по условию; $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{a}\,\vec{c}$, т.к. $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ и $\vec{a}\,\vec{b}=\vec{a}\,\vec{c}=60°$.

462. Воспользуемся свойством параллелепипеда.

1) $\vec{BA}\cdot\vec{D_1C_1}=(-\vec{AB})\cdot\vec{D_1C_1}=-\vec{AB}^2=-1$ (т.к. $\vec{AB}=\vec{D_1C_1}$, $\vec{AB}\parallel\vec{D_1C_1}$, по свойству параллелепипеда, то $\vec{AB}=\vec{D_1C_1}$,).

2) $\vec{BC_1}=\vec{BC}+\vec{CC_1}=\vec{AD}+\vec{AA_1}$



$$\vec{D_1B}=\vec{D_1C_1}+\vec{C_1C}+\vec{CB}=\vec{AB}-\vec{AA_1}-\vec{AD},$$

$$\vec{BC_1}\cdot\vec{D_1B}=(\vec{AD}+\vec{AA_1})(\vec{AB}-\vec{AA_1}-\vec{AD})=$$

$$=\vec{AD}\cdot\vec{AB}-\vec{AD}\cdot\vec{AA_1}-\vec{AD}^2+\vec{AA_1}\cdot\vec{AB}-\vec{AA_1}^2-$$

$-\vec{AA_1}\cdot\vec{AD}=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}-1\cdot1\cdot0-1+1\cdot1\cdot0-1\cdot1\cdot0=\frac{1}{2}-1-1=-1{,}5.$

3) $\vec{AC_1}=\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CC_1}=\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1}$,

$\vec{AC_1}\cdot\vec{AC_1}=(\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1})(\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1})=\vec{AB}^2+\vec{AB}\cdot\vec{AD}+\vec{AB}\cdot\vec{AA_1}+$

$+\vec{AD}\cdot\vec{AB}+\vec{AD}^2+\vec{AD}\cdot\vec{AA_1}+\vec{AA_1}\cdot\vec{AB}+\vec{AA_1}\cdot\vec{AD}+\vec{AA_1}^2=1+1\cdot1\cdot\cos 60°+$

$+1\cdot1\cos 60°+1+1=1+2\cdot\frac{1}{2}+1+1=4.$

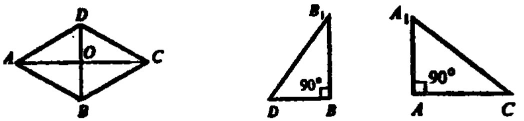
4) В основании параллелепипеда лежит ромб ABCD, у которого $\angle A=\angle C=60°$, AD=1, AB=1, откуда следует, что

а) $\angle ADB=\angle DBA=60°$,

б) DB=1.

В ΔDBB_1: DB=1, $BB_1=AA_1=1$, $\angle DBB_1=90°$ ($BB_1\perp$ плоскости основания, т.к. $AA_1\perp$ плоскости основания и $BB_1 \parallel AA_1$)

$|\vec{DB_1}|=\sqrt{\left|\vec{BB_1}\right|^2+\left|\vec{DB}\right|^2}=\sqrt{2}.$



5) Рассмотрим основание параллелепипеда. AC=2AO, где O — точка пересечения диагоналей ромба. AO — высота в равностороннем ΔADB, $AO=AB\cdot\sin 60°=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, $AC=\sqrt{3}$.

В прямоугольном ΔAA_1C

$|\vec{A_1C}|=\sqrt{\vec{A_1A}^2+\vec{AC}^2}=\sqrt{1+3}=2,$

6) $\vec{DA_1}=(-\vec{AD})+\vec{AA_1}$, $\quad\vec{D_1B}=\vec{D_1D}+\vec{DA}+\vec{AB}=-\vec{AA_1}-\vec{AD}+\vec{AB}$,

$\vec{DA_1}\cdot\vec{D_1B}=(\vec{AA_1}-\vec{AD})(\vec{AB}-\vec{AA_1}-\vec{AD})=\vec{AA_1}\cdot\vec{AB}-\vec{AA_1}^2-\vec{AA_1}\cdot\vec{AD}-$

$-\vec{AD}\cdot\vec{AB}+\vec{AD}\cdot\vec{AA_1}+\vec{AD}^2=\vec{AD}^2-\vec{AA_1}^2+\vec{AA_1}\cdot\vec{AB}-\vec{AD}\cdot\vec{AB}=1-1+0-$

$-1\cdot1\cos60°=-\frac{1}{2}$

$\cos(\vec{DA_1}\ \hat{}\ \vec{D_1B})=\frac{\vec{DA_1}\cdot\vec{D_1B}}{|\vec{DA_1}|\cdot|\vec{D_1B}|}$, $\qquad |\vec{DA_1}|=\sqrt{AD^2+AA_1^2}=\sqrt{2}$,

$|\vec{DB}|=|\vec{DB_1}|=\sqrt{2}$, $\cos(\vec{DA_1} \wedge \vec{D_1B})=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}$.

7) $\vec{AC_1}=\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1}$, $\vec{DB_1}=-\vec{AD}+\vec{AB}+\vec{BB_1}=\vec{AB}-\vec{AD}+\vec{AA_1}$,

$\vec{AC_1}\cdot\vec{DB_1}=(\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1})(\vec{AB}-\vec{AD}+\vec{AA_1})=\vec{AB}^2+\vec{AD}\cdot\vec{AB}+\vec{AA_1}\cdot\vec{AB}-$

$-\vec{AD}\cdot\vec{AB}-\vec{AD}^2-\vec{AD}\cdot\vec{AA_1}+\vec{AA_1}\cdot\vec{AB}+\vec{AA_1}\cdot\vec{AD}+\vec{AA_1}^2=\vec{AB}^2+2\vec{AA_1}\cdot\vec{AB}-$

$-\vec{AD}^2+\vec{AA_1}^2=1+2\cdot0-1+1=1$, $|\vec{AC_1}|=|\vec{A_1C}|=2$, $|\vec{DB_1}|=\sqrt{2}$,

$\cos(\vec{AC_1} \wedge \vec{DB_1})=\dfrac{\vec{AC_1}\cdot\vec{DB_1}}{|\vec{AC_1}|\cdot|\vec{DB_1}|}=\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

463. см.учебник.

464. $\cos\varphi=\dfrac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.

а) $\vec{AB}\{1; 1; -2\}$; $\vec{CD}\{1; 0; -1\}$,

$\cos\varphi=\dfrac{|1+0+2|}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{1+0+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi=30°$.

б) $\vec{AB}\{1; 0; -1\}$; $\vec{CD}\{0; -2; 2\}$,

$\cos\varphi=\dfrac{|0+0-2|}{\sqrt{1+0+1}\cdot\sqrt{0+4+4}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\cdot2\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$, $\varphi=\arccos\dfrac{1}{2}$, $\varphi=60°$.

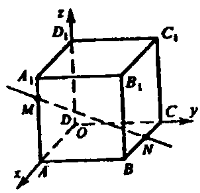
в) $\vec{AB}\{1; 1; -2\}$; $\vec{CD}\{-2; -2; 4\}$,

$\cos\varphi=\dfrac{|-2-2-8|}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{4+4+16}}=\dfrac{12}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}}=\dfrac{12}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\cdot2}=1$, $\varphi=\arccos(1)$ $\varphi=0°$

г) $\vec{AB}\{-1; 0; 1\}$; $\vec{CD}\{0; 0; -2\}$, $\cos\varphi=\dfrac{|0+0-2|}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{4}}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi=45°$

465. см.учебник.

466. Обозначим стороны через a. Введем прямоугольную систему координат Oxyz с началом в точке D. Тогда вершины куба имеют координаты: A (a; 0; 0), B (a; a; 0), C (0; a; 0), D (0; 0; 0), A_1 (a; 0; a), B_1 (a; a; a), C_1 (0; a; a), D_1 (0; 0; a); точки M и N:



M(a; 0; $\frac{3}{4}$a), N ($\frac{1}{2}$a; a; 0).

а) $\vec{MN}$ $\{-\frac{1}{2}a; a; -\frac{3}{4}a\}$, $\vec{DD_1}$ $\{0; 0; a\}$,

$$\cos\varphi=\frac{\left|0+0-\frac{3}{4}a\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2+a^2+\frac{9}{16}a^2}\cdot\sqrt{0+0+a^2}}=\frac{\frac{3}{4}a^2}{a\sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{9}{16}}\cdot a}=\frac{\frac{3}{4}a^2}{a\sqrt{\frac{29}{16}}\cdot a}=\frac{3}{\sqrt{29}},$$

б) $\overrightarrow{BD}$ $\{-a; -a; 0\}$,

$$\cos\varphi=\frac{\left|\frac{1}{2}a^2-a^2+0\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2+a^2+\frac{9}{16}a^2}\cdot\sqrt{2a^2}}=\frac{\frac{1}{2}a^2}{a\sqrt{\frac{29}{16}}\cdot a\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{16}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}}=\frac{2}{\sqrt{58}};$$

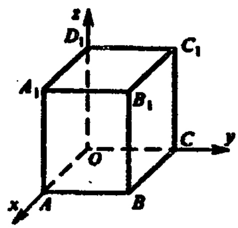
в) $\overrightarrow{B_1D}$ $\{-a; -a; -a\}$,

$$\cos\varphi=\frac{\left|-\frac{1}{2}a(-a)-a^2-a(-\frac{3}{4})a\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2+a^2+\frac{9}{16}a^2}\cdot\sqrt{3a^2}}=\frac{\left|(\frac{1}{2}-1+\frac{3}{4})a^2\right|}{a\sqrt{\frac{29}{16}}\cdot a\sqrt{3}}=\frac{\frac{1}{4}a^2}{a^2\frac{\sqrt{29}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{16}}}=\frac{1}{\sqrt{87}};$$

г) $\overrightarrow{A_1C}$ $\{-a; a; -a\}$,

$$\cos\varphi=\frac{\left|-\frac{1}{2}a(-a)-a^2-\frac{3}{4}a(-a)\right|}{a\sqrt{\frac{29}{16}}\cdot\sqrt{3a^2}}=\frac{\left|a^2(\frac{1}{2}+1+\frac{3}{4})\right|}{a^2\sqrt{\frac{29}{16}}\cdot\sqrt{3}}=\frac{a^2 9\sqrt{16}}{a^2 4\sqrt{29}\cdot\sqrt{3}}=\frac{9}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{29}}.$$

467. Обозначим $AB=a=BC$, тогда $AA_1=2a$.



Введем прямоугольную систему координат как показано на рисунке. Тогда вершины параллелепипеда имеют координаты:
A $(a; 0;0)$, B $(a; a; 0)$, C$(0; a; 0)$, D $(0; 0; 0)$, A_1 $(a; 0; 2a)$, B_1 $(a; a; 2a)$, C_1 $(0; a; 2a)$, $D_1(0; 0; 2a)$.

а) $\overrightarrow{BD}$ $\{-a; -a; 0\}$, $\overrightarrow{CD_1}$ $\{0; -a; 2a\}$,

$$\cos\varphi=\frac{|0+a^2+0|}{\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{a^2+4a^2}}=\frac{a^2}{a^2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \varphi\approx 71°34';$$

б) $\overrightarrow{AC}$ $\{-a; a; 0\}$, $\overrightarrow{AC_1}$ $\{-a; a; 2a\}$,

$$\cos\varphi=\frac{|a^2+a^2+0|}{\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{2a^2+4a^2}}=\frac{2a^2}{a^2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \varphi\approx 54°44'.$$

468. Введем прямоугольную систему координат аналогично п. № 467.
Тогда A $(2; 0; 0)$, B $(2; 1; 0)$, C $(0; 1; 0)$, D $(0; 0; 0)$, A_1 $(2; 0; 3)$, B_1 $(2; 1; 3)$, C_1 $(0; 1; 3)$, D_1 $(0;0;3)$.

а) $\overrightarrow{AC}\{-2; 1; 0\}$, $\overrightarrow{D_1B}\{2; 1; -3\}$,

$$\cos\varphi=\frac{|-4+1|}{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{4+1+9}}=\frac{3}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}}=\frac{3}{\sqrt{70}},$$

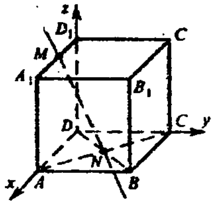
б) $\vec{AB_1}$ $\{0; 1; 3\}$, $\vec{BC_1}$ $\{-2; 0; 3\}$,

$\cos\varphi = \frac{|9|}{\sqrt{1+9}\ \sqrt{4+9}} = \frac{9}{\sqrt{10}\ \sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{130}}$,

в) $\vec{A_1D}$ $\{-2; 0; -3\}$. $\vec{AC_1}$ $\{-2; 1; 3\}$,

$\cos\varphi = \frac{|4-9|}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{4+1+9}} = \frac{5}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{182}}$.

469. Обозначим стороны через а.



Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. Тогда $\vec{DA}$ $\{a; 0; 0\}$, $\vec{DC}\{0; a; 0\}$, $\vec{DD_1}$ $\{0; 0; a\}$, $M(\frac{4}{5}a; 0; a)$, $\vec{DD_1}$ $\{0; 0; a\}$, $M(\frac{4}{5}a; 0; a)$.

$N(\frac{1}{2}a; \frac{1}{2}a; 0)$, $\vec{MN}$ $\{\frac{-3}{10}a; \frac{1}{2}a; -a\}$. $\sin\varphi = |\cos\theta|$,

где φ — угол между прямой и плоскостью; θ — угол между прямой и ненулевым вектором, перпендикулярным плоскости.

а) $DD_1 \perp$ плоскости ABCD,

$$\sin\varphi = \left|\cos\left(\vec{MN} \wedge \vec{DD_1}\right)\right| = \frac{|0+0-a^2|}{\sqrt{\frac{9}{100}a^2+\frac{1}{4}a^2+a^2}\cdot\sqrt{a^2}} = \frac{10}{\sqrt{134}}.$$

б) $DA \perp$ плоскости DD_1C_1C,

$$\sin\varphi = \left|\cos\left(\vec{MN} \wedge \vec{DA}\right)\right| = \frac{|\frac{-3}{10}a^2|}{a\sqrt{\frac{134}{100}}\cdot\sqrt{a^2}} = \frac{3}{\sqrt{134}},$$

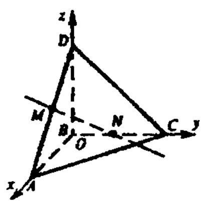
в) $DC \perp$ плоскости AA_1D_1D,

$$\sin\varphi = \left|\cos\left(\vec{DC} \wedge \vec{MN}\right)\right| = \frac{|\frac{1}{2}a\cdot a|}{a\sqrt{\frac{134}{100}}\cdot\sqrt{a^2}} = \frac{5}{\sqrt{134}}.$$

470. Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке

A (2; 0; 0), B (0; 0; 0), C (0; 1; 0), D (0; 0; 2), M (1; 0; 1), N (0; $\frac{1}{2}$; 0)

$\sin\varphi = |\cos\theta|$, где φ — угол между прямой и плоскостью; θ — угол между прямой и ненулевым вектором, перпендику-лярным к этой плоскости



а) вектор $\vec{BC} \perp$ к плоскости ABD

$\vec{BC}$ $\{0; 1; 0\}$, $\vec{MN}$ $\{-1; \frac{1}{2}; -1\}$,

$$\sin\varphi = \left|\cos\left(\vec{BC} \wedge \vec{MN}\right)\right| = \frac{|0+\frac{1}{2}+0|}{\sqrt{1}\ \sqrt{1+\frac{1}{4}+1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{1}{3}$$

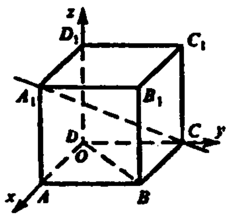
б) вектор $\overrightarrow{BA} \perp$ к плоскости DBC.

$\overrightarrow{BA}\ \{2; 0; 0\}$, $\sin\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{MN}\right)\right| = \dfrac{|-2|}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}} = \dfrac{2}{2\cdot\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$.

в) вектор $\overrightarrow{BD} \perp$ к плоскости ABC

$\overrightarrow{BD}\ \{0; 0; 2\}$, $\sin\varphi = \left|\cos\left(\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{MN}\right)\right| = \dfrac{|-2|}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}+1}} = \dfrac{2}{2\cdot\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$.

471. Пусть дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, A_1C — диагональ куба; DB — диагональ грани куба.



Введем прямоугольную систему координат. С началом координат в т. D и осями, напрпвленными вдоль ребер OA, OB, OC. Обозначим сторону куба через a.

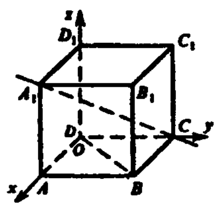
Тогда A_1 (a; 0; a), C (0; a; 0), $\overrightarrow{A_1C}\ \{-a; a; -a\}$, D (0; 0; 0),

B (a; a; 0), $\overrightarrow{DB}\ \{a; a; 0\}$.

$\cos(\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{A_1C}) = \dfrac{|a^2 - a^2|}{\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{3a^2}} = 0.$

Следовательно, $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{A_1C} = 90°$, соответственно угол между прямыми $\overrightarrow{A_1C}$ и $\overrightarrow{DB}$ равен 90°.

472. Введем прямоугольную систему координат. С началом координат в т. D и осями, напрпвленными вдоль ребер OA, OB, OC. Обозначим сторону куба через a. Тогда:



1) M_1 (a; 0; a), P (0; a; 0), PM_1 {a; –a; a}; M (a; 0; 0), Q_1 (0; 0; a), MQ_1 (–a; 0; a}.

$\overrightarrow{PM_1}$ и $\overrightarrow{MQ_1}$ — направляющие векторы прямых $\overrightarrow{PM_1}$ и $\overrightarrow{MQ_1}$, угол между ними равен углу между этими прямыми.

$\cos(\overrightarrow{PM_1} \wedge \overrightarrow{MQ_1}) = \dfrac{|-a^2 + a^2|}{\sqrt{3a^2}\ \sqrt{2a^2}} = 0$, следовательно, угол между прямыми PM_1 и MQ_1 равен 90°.

Докажем, что прямая MN_1, пересекающая прямую MQ_1 в точке M и лежащая в плоскости MN_1Q_1, перпендикулярна прямой PM_1.

N_1 (a; a; a); $\overrightarrow{MN_1}$ и $\overrightarrow{PM_1}$ — направляющие векторы этих прямых.

$\overrightarrow{MN_1}\ \{0; a; a\}$. $\cos(\overrightarrow{PM_1} \wedge \overrightarrow{MN_1}) = \dfrac{|-a^2 + a^2|}{\sqrt{3a^2}\cdot\sqrt{2a^2}} = 0$, $PM_1\ MN_1 = 90°$.

Доказали, что $PM_1 \perp MQ_1$; $PM_1 \perp MN_1$ лежит в плоскости MN_1Q_1, MN_1 лежит в плоскости MN_1Q_1. Эти прямые пересекаются в точке M. Значит, $PM_1 \perp$ плоскости MN_1Q_1.

2) Прямые QN и QP_1 лежат в плоскости QNP_1 и пересекаются в точке Q

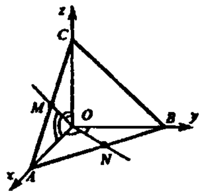
Q (0; 0; 0), N (a; a; 0), $\vec{QN}$ {a; a; 0}, P_1 (0; a; a), $\vec{QP_1}$ {0: a; a}

$$\cos(\vec{PM_1} \wedge \vec{QN}) = \frac{|a^2 - a^2|}{\sqrt{3a^2} \cdot \sqrt{2a^2}} = 0, \ PM_1 \perp QN_1,$$

$$\cos(\vec{PM_1} \wedge \vec{QP_1}) = \frac{|-a^2 + a^2|}{\sqrt{3a^2} \cdot \sqrt{2a^2}} = 0, \ PM_1 \perp QP_1$$

Таким образом, прямая $PA_1 \perp$ плоскости QNP_1.

473. Введем прямоугольную систему координат так, что луч OA будет совпадать с осью Ox, OB с осью Oy, OC с осью Oz. Отложим на лучах отрезки OA=OB=OC=1 Получим тетраэдр ABOC. OM и ON — биссектрисы углов ∠AOC и ∠AOB.



$$AM=MC=\frac{1}{2}AC; \ AN=NB=\frac{1}{2}AB.$$

A (1; 0; 0), B (0; 1; 0), C (0; 0; 1), M $(\frac{1}{2}, 0; \frac{1}{2})$, N $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 0)$;

$\vec{OM}$ $\{\frac{1}{2}, 0; \frac{1}{2}\}$, $\vec{ON}$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

$$\cos(\vec{OM} \wedge \vec{ON}) = \frac{\frac{1}{4}+0+0}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}; \ \vec{OM} \wedge \vec{ON} = 60°$$

$\vec{OM}$ и $\vec{ON}$ — направляющие векторы лучей OM и ON

∠MON=60°

474. см.учебник.

475. Пусть точка N — середина отрезка CB, M — точка пересечения медиан ΔDBC, ∠DAN=φ

Введем прямоугольную систему координат Oxyz. Тогда C (0; 3, 0), B (4, 0; 0).

Точка N — середина отрезка CB: N $(2, \frac{3}{2}, 0)$.

D (5 cos 60°; 5 cos 45°; 5 sin φ), $\vec{AD}$ $\{\frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}, \sin\varphi\}$

$$\vec{AD} \ \vec{AD} = |\vec{AD}|^2 = 25, \ 25 = (\frac{5}{2})^2 + (\frac{5\sqrt{2}}{2})^2 + (5\sin\varphi)^2, \ 25 = \frac{25}{4} + \frac{25 \cdot 2}{4} + 25\sin^2\varphi$$

следовательно, $\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ φ=30°

$\vec{AD}\ \{\frac{5}{2};\ \frac{5\sqrt{2}}{2};\ \frac{5}{2}\}$, $\angle DAN=30°$, $\vec{AN}\ \{2;\ \frac{3}{2};\ 0\}$.

$$|\vec{AN}|=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2};$$

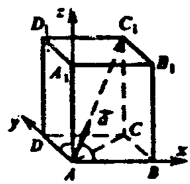
$$\vec{AM}=\vec{AN}+\vec{NM}=\vec{AN}+\frac{1}{3}\vec{ND}=\vec{AN}+\frac{1}{3}(\vec{AD}-\vec{AN})=\frac{1}{3}\vec{AD}+\frac{2}{3}\vec{AN},$$

$$\vec{AM}\ \{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\cdot 2;\ \frac{1}{3}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2};\ \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}\},\ \text{т.е.}\ \vec{AM}\ \{\frac{13}{6};\ \frac{5\sqrt{2}+6}{6},\ \frac{5}{6}\}.$$

$$|\vec{AM}|=\sqrt{\frac{169}{36}+\frac{(5\sqrt{2}+6)^2}{36}+\frac{25}{36}}=\sqrt{\frac{169+25\cdot 2+2\cdot 5\sqrt{2}\cdot 6+36+25}{36}}=$$

$$=\sqrt{\frac{280+60\sqrt{2}}{36}}=\sqrt{\frac{4(70+15\sqrt{2})}{36}}=\frac{2\sqrt{70+15\sqrt{2}}}{6}=\frac{1}{3}\sqrt{70+15\sqrt{2}}.$$

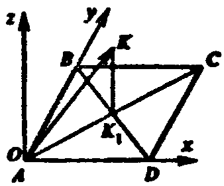
476. Пусть $\angle CAC_1=\varphi$.



Введем прямоугольную систему координат Oxyz, рассмотрим единичный вектор $\vec{a}$, сонаправленный с вектором $\vec{AC_1}$. $\vec{a}$ {cos 60°; cos 60°; sin φ}, $\vec{a}\ \vec{a}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\sin^2\varphi=1$;

$\sin^2\varphi=\frac{1}{2}$, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$, следовательно, $\varphi=45°$

477. Введем прямоугольную систему координат Oxyz. Обозначим сторону квадрата через a, KK_1=b, где K_1 — точка пересечения диагоналей, или центр квадрата. Тогда $\vec{AD}$ {a; 0; 0}, $\vec{AB}$ {0; a; 0}, $\vec{BD}$ {a; –a; 0}.



Точка K_1 — центр квадрата, следовательно, K_1 $(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0)$, тогда K $(\frac{a}{2};\frac{a}{2};b)$;

$\vec{AK}$ $(\frac{a}{2};\frac{a}{2};b\}$.

Используя формулу скалярного произведения векторов, найдем длины векторов $\vec{BD}$ и $\vec{AK}$. Из прямоугольного треугольника BAD: $BD=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$.

Из прямоугольного треугольника AKK_1, где $AK_1=\frac{1}{2}BD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$:

$AK=\sqrt{b^2+(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2}=\sqrt{b^2+\frac{a\sqrt{2}}{2}}$; $\vec{AK}\cdot\vec{BD}=|\vec{AK}|\cdot|\vec{BD}|\cdot\cos(\vec{AK}\wedge\vec{BD})$. С другой стороны $\vec{AK}\cdot\vec{BD}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}+0=0$, $\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}+0=$ $=a\sqrt{2}\sqrt{b^2+\frac{a^2}{2}}\cos(\vec{AK}\wedge\vec{AD})$, $0=a\sqrt{2}\cdot\sqrt{b^2+\frac{a^2}{2}}\cos(\vec{AK}\wedge\vec{BD})$

Тогда, т. к. вектора ненулевые, то $\cos(\vec{AK}\wedge\vec{BD})=0$. Следовательно, $\vec{AK}\wedge\vec{BD}=90°$, что и требовалось доказать.

478.

а)

Точка	Симметричная ей точка
A (0; 1, 2),	A_1 (0; –1; –2);
B (3, –1, 4),	B_1 (–3; 1; –4);
C (1. 0; –2),	C_1 (–1; 0; 2).

б)

Ось симметрии — ось Ox

Точка	Симметричная ей точка
A (0; 1, 2),	A_1 (0; –1; –2);
B (3, –1, 4),	B_1 (3; 1; –4);
C (1, 0; –2),	C_1 (1; 0; 2).

Ось симметрии — ось Oy

Точка	Симметричная ей точка
A (0; 1, 2),	A_1 (0; 1; –2);
B (3, –1, 4),	B_1 (–3; –1; –4);
C(1, 0; –2),	C_1 (–1; 0; 2).

Ось симметрии — ось 0z:

Точка	Симметричная ей точка
A (0; 1, 2),	A_1 (0; –1; 2);
B (3; –1, 4),	B_1 (–3; 1; 4);
C (1, 0; –2),	C_1 (–1; 0; –2).

в)

Если плоскость симметрии — плоскость Oxy, то

Точка	Симметричная ей точка
A (0; 1; 2),	A_1 (0; 1; –2);
B (3, –1, 4),	B_1 (3; –1; –4);
C (1, 0; –2),	C_1 (1; 0; 2).

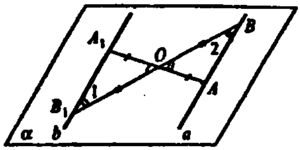
Плоскость симметрии — плоскость Oyz:

Точка	Симметричная ей точка
A (0; 1; 2),	A_1 (0; 1; 2);
B (3; –1; 4),	B_1 (–3; –1; 4),
C (1; 0; –2),	C_1 (–1; 0; –2)

Плоскость симметрии — плоскость Oxz:

Точка	Симметричная ей точка
A (0; 1; 2),	A_1 (0; –1; 2);
B (3; –1; 4),	B_1 (3; 1; 4);
C (1; 0; –2),	C_1 (1; 0; –2).

479. а) По известной теореме через центр симметрии и данную прямую можно провести единственную плоскость.



Пусть O — центр симметрии, a — данная прямая, α — плоскость, проведенная через O и a.

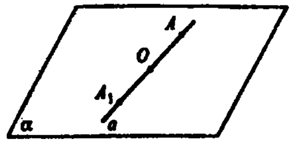
Пусть A ∈ a, построим отрезок OA. Продолжим OA за точку O на расстояние OA_1=AO. Получим точку A_1, симметричную A.

Пусть B ∈ a, построим отрезок OB. Продолжим OB за точку O на расстояние OB_1=OB. Получим точку B_1, симметричную точке B.

Через A_1 и B_1 проведем прямую b. Рассмотрим ΔAOB и ΔA_1OB_1·AO=A_1O, BO=OB_1, Δ AOB=ΔA_1OB_1 как вертикальные, следовательно, ΔAOB=ΔA_1OB_1.

Тогда, $\angle 1=\angle 2$ и a ∥ b.

б) Пусть A ∈ a. Симметричная ей точка A_1 тоже принадлежит прямой a; AO=OA_1.



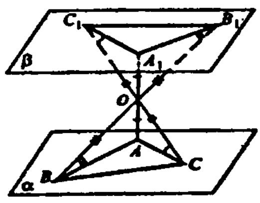
Точка A произвольна, следовательно, любая точка прямой, а также симметричная точка относительно центра O лежат на прямой a, следовательно, прямая a переходит сама в себя при условии, что проходит через центр симметрии.

480. а) Пусть O — центр симметрии, α — данная плоскость.

1. Пусть точку C∈a, построим отрезок CO и про-должим его за точку O на расстояние OC_1 = OC.

2. Пусть точка A∈a, построим отрезок AO и продолжим его за точку O на расстояние OC_1=OA.

3. Пусть точка B∈a, построим отрезок BO и продолжим его за точку O на расстояние OB_1=OB.

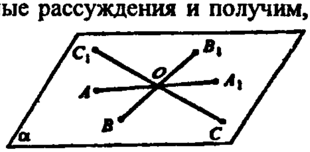


4. Через точки A_1, B_1, C_1 проведем плоскость β.

5. Соединим точки A, B, C, A_1, B_1 и C_1 отрезками. ΔOAC=$\Delta O_1A_1C_1$, т.к. OA_1=OA, OC_1=OC и ∠AOC=ΔA_1OC_1 как вертикальные. Отсюда AC =A_1C_1.

Тогда $\angle A_1C_1O=\angle ACO$, по признаку параллельности прямых A_1C∥AC.

6. Для ΔOAB и ΔOA_1B_1 проведем аналогичные рассуждения и получим, что ΔOAB=OA_1B_1. Тогда $\angle A_1B_1O=\angle ABO$, по признаку параллельности прямых A_1B_1∥AB.



7. Если две пересекающиеся прямые (AC и AB) в одной плоскости (α) соответственно

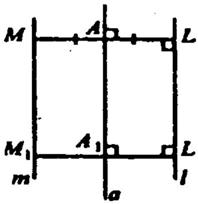
параллельны двум прямым (A_1C_1 и A_1B_1) другой плоскости (β), то эти плоскости параллельны. Итак, $\alpha \| \beta$, утверждение доказано.

б) Если точка $O \in \alpha$, то любая точка плоскости β имеет симметричную ей точку относительно O, тоже принадлежащую плоскости α.

Тогда для $A \in \alpha$ ей симметричная точка $A_1 \in \alpha$; для $B \in \alpha$ ей симметричная точка $B_1 \in \alpha$; для $C \in \alpha$ ей симметричная точка $C_1 \in \alpha$.

Через три точки A_1, B_1, C_1, принадлежащие плоскости β, можно провести единственную плоскость, соответственно, она совпадает с плоскостью α.

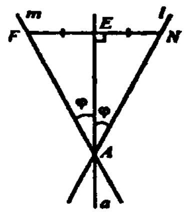
481. а) Пусть a — ось симметрии, $\ell \| \alpha$. Из точки $L \in \ell$ проведем $LA \perp a$; продолжим LA за точку A на рас-стояние AM=LA.



Из точки $L_1 \in \ell$ проведем $L_1A_1 \perp a$; продолжим L_1A_1 за точку A_1 на расстояние $A_1M_1=L_1A_1$.

Параллельные прямые a и ℓ лежат в одной плоскости, тогда, четырехугольник LMM_1L_1 — плоский четырех-угольник.

$ML=M_1L_1$ — по построению, $ML \perp \ell$, $M_1L_1 \perp \ell$, следовательно, $ML \| M_1L_1$ поэтому четырехугольник LMM_1L_1 — прямоугольник. Т.е., $MM_1 \| L_1L$, или $\ell \| m$.



б) Если a не паралелльна ℓ, то a пересекается с L в некоторой точке A.

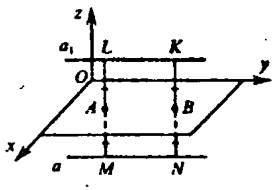
Выберем некоторую точку $N \in \ell$, построим $NE \perp a$, продолжим отрезок NE за точку E на расстояние EF=NE. Через точку F проведем прямую FA (m).

В треугольниках ΔAEF и ΔAEN. NE=EF, AE – общий катет, таким образом, $\Delta AEF = \Delta AEN$, следовательно, $\angle EAN = \angle EAF = \varphi$.

Таким образом, прямая m образует угол φ с осью симметрии.

482. Выберем плоскость Oxy.

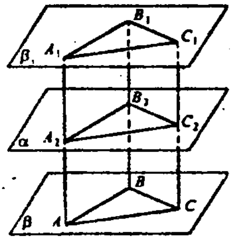
Пусть прямая a параллельна плоскости Oxy.



Точки M и L, N и K симметричны; MA=AL, NB=BK. Если a параллельна плоскости Oxy, то NB=MA=BK=AL, две прямые, перпендикулярные плоскости, между собой параллельны, тогда $ML \| NK$. Далее, ML=NK и четырехугольник MNKL — прямоугольник, поэтому $LK \| MN$ или $a_1 \| a$. А параллельные прямые лежат в одной плоскости.

Если a не параллельна Oxy, то она пересекает эту плоскость в точке — P При симметрии точка P переходит в себя, т. к. лежит в плоскости Oxy Таким образом, $P \in a_1$. Т.е. прямые a и a_1 имеют общую точку и лежат в одной плоскости.

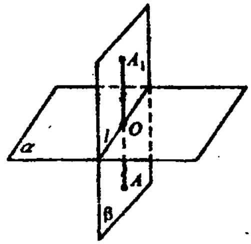
483. а) Выберем три точки в плоскости A, B, C, не лежащие на одной прямой. Проведем $AA_2 \perp \alpha$, $BB_2 \perp \alpha$, $CC_2 \perp \alpha$. Продолжим эти отрезки за точки A_1, B_1, C_1 так, что $A_2A_1=AA_2$, $B_2B_1=BB_2$, $C_2C_1=CC_2$. AA_1B_1B — прямоугольник, т.к. $AA_1=BB_1$ и $AA_1 \parallel BB_1$. Таким образом, $A_1B_1 \parallel AB$ BB_1C_1C — прямоугольник, т.к. $BB_1=CC_1$ и $BB_1 \parallel BC$ тогда, $B_1C_1 \parallel BC$.



Плоскость β_1 проходит через точки A_1, B_1 и C_1, она — единственная.

Если две пересекающиеся прямые (BA и BC) одной плоскости (β) параллельны двум прямым (B_1A_1 и B_1C_1) другой плоскости (β_1), то эти плоскости параллельны: $\beta_1 \parallel \beta$.

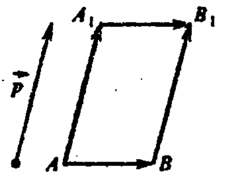
б) Пусть $\alpha \perp \beta$. Возьмем произвольную точку $A \in \alpha$ и построим AO перпендикулярно плоскости α. Продолжим отрезок за точку O на расстояние $OA_1=AO$



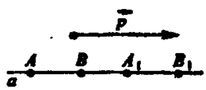
Две плоскости взаимно перпендикулярны и к одной из них проведен перпендикуляр, имеющий общую точку с другой плоскостью, тогда этот перпендикуляр весь лежит в этой плоскости, т.е. $AO \subset \beta$, следовательно, и $AA_1 \subset \beta$.

Таким образом, каждая точка плоскости β отображается в точку, ей симметричную, которая тоже принадлежит плоскости в. тогда, плоскость β отображается сама на себя, или β_1 совпадает с β.

484. а) Докажем, что $AB \parallel A_1B_1$ (см. пункт 52 учебника). Доказано, что $A_1B_1=AB$, а значит $A_1B_1 \parallel AB$.



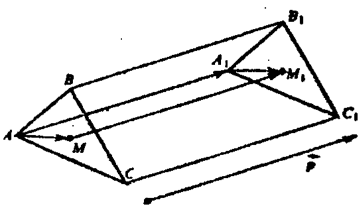
б) Пусть $a \parallel \vec{p}$. Выберем точку $A \in a$, тогда точка A перейдет в точку A_1, так, что $AA_1=\vec{p}$. Следовательно, они лежат в одной плоскости. В плоскости через точку A можно провести только одну прямую AA_1, параллельную $\vec{p}$, тогда $A_1 \in a$.



Таким образом, точка $A \in a$ отображается в точку $A_1 \in a$

Для любой другой точки $B \in a$ повторим рассуждения, тогда, каждая точка прямой a переходит в точку прямой a, то есть прямая отображается на себя.

Пусть a содержит $\vec{p}$, тогда доказательство верно, просто векторы AA_1 и $\vec{p}$ лежат на одной прямой a.



485. Параллельный перенос — это движение, тогда $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $AC=A_1C_1$. Отсюда $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$. Проведем отрезки AM и A_1M_1. $AM=A_1M_1$.

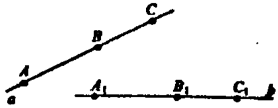
Для плоского четырехугольника AMM_1A_1 имеем:

$AM \parallel A_1M_1$, $AM=A_1M_1$. следовательно,

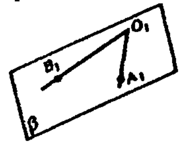
AMM_1A_1 — параллелограмм, $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{MM_1}=\vec{p}$

486. а) а — данная прямая.

Возьмем на прямой а точки A, B, C. При движении они перейдут в точки A_1, B_1, C_1 соответственно, причем $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$ и $AC=A_1C_1$. Необходимо доказать, что A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.



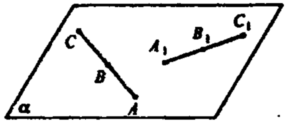
$A_1C_1=A_1B_1+B_1C_1$. Такое равенство верно, если все три точки — лежат на одной прямой; иначе по неравенству треугольника $A_1C_1 < A_1B_1+B_1C_1$. В силу произвольного выбора точек A, B и C доказательство справедливо для любых других точек, таким образом, движение переводит прямую в прямую.



б) В плоскости α проведем прямую а и возьмем точку O $\notin$ a. Проведем из точки O отрезки, пересекающие прямую а в точках A и B. При движении: $O \to O_1$, $A \to A_1$, так что $OA=O_1A_1$, $B \to B_1$, так что $OB=O_1B_1$.

По аксиоме: через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.

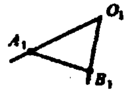
487. а) AC — заданный отрезок, $AC \subset a$.



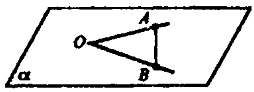
При движении $A \to A_1$, $C \to C_1$. Докажем, что весь отрезок AC отображается на отрезок A_1C_1.

Возьмем произвольную точку $B \in AC$. При движении $B \to B_1$. $AB+BC=AC$. Т.к. при движении расстояния между точками сохраняются, то $A_1B_1=AB$, $B_1C_1=BC$, $A_1C_1=AC$. Тогда $A_1C_1=A_1B_1+B_1C$ Равенство выполняется только когда точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, иначе по неравенству треугольника $A_1C_1 < A_1B_1+B_1C_1$, таким образом, точки отрезка AC отображаются в точки отрезка A_1C_1.

б) $\angle AOB$ — лежит в плоскости a.



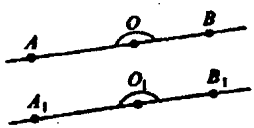
При движении $O \to O_1$, $A \to A_1$, $B \to B_1$, при этом $OA=O_1A_1$ и $OB=O_1B_1$ $AB=A_1B_1$ и $\Delta OAB = \Delta O_1A_1B_1$ по трем сторонам, тогда $\angle AOB=\angle A_1B_1C_1$.



Если $\angle AOB=180°$, то $\angle A_1O_1B_1=180°$.

Доказательство:

На сторонах развернутого угла возьмем точки A и B. При движении $A \to A_1$, $B \to B_1$, так что $AB=A_1B_1$, так что $AB=A_1B_1$; $O \to O_1$ при движении $AO=A_1O_1$ и $O_1B_1=OB$. Итак, $AO_1+O_1B_1=A_1B_1$.



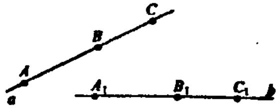
Точки A_1, O_1, B_1 лежат на одной прямой, точки A_1 и .B_1 лежат по разные стороны от точки O_1, тогда, $\angle A_1O_1B_1$ — развернутый, т.е. Δ $A_1O_1B_1$ $=180°$, что и требовалось доказать.

488. а) Пусть a || b, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$. Пересечем a и b прямой c, следовательно $\angle 1=\angle 2$ как внутренние накрест лежащие при параллельных a, b и секущей c. Примем следу-ющие обозначения (смотри рисунок):

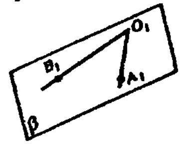
M и N — произвольные точки, лежащие по разные стороны от секущей AB.

486. а) a — данная прямая.

Возьмем на прямой a точки A, B, C. При движении они перейдут в точки A_1, B_1, C_1 соответственно, причем $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$ и $AC=A_1C_1$. Необходимо доказать, что A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.



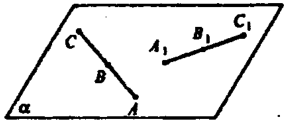
$A_1C_1=A_1B_1+B_1C_1$. Такое равенство верно, если все три точки — лежат на одной прямой; иначе по неравенству треугольника $A_1C_1 < A_1B_1+B_1C_1$. В силу произвольного выбора точек A, B и C доказательство справедливо для любых других точек, таким образом, движение переводит прямую в прямую.



б) В плоскости α проведем прямую a и возьмем точку $O \notin a$. Проведем из точки O отрезки, пересекающие прямую a в точках A и B. При движении: $O \to O_1$, $A \to A_1$, так что $OA=O_1A_1$, $B \to B_1$, так что $OB=O_1B_1$.

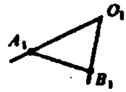
По аксиоме: через две пересекающиеся прямые проходит плоскость и притом только одна.

487. а) AC — заданный отрезок, $AC \subset a$.



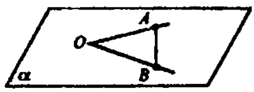
При движении $A \to A_1$, $C \to C_1$. Докажем, что весь отрезок AC отображается на отрезок A_1C_1.

Возьмем произвольную точку $B \in AC$. При движении $B \to B_1$. $AB+BC=AC$. Т.к. при движении расстояния между точками сохраняются, то $A_1B_1=AB$, $B_1C_1=BC$, $A_1C_1=AC$. Тогда $A_1C_1=A_1B_1+B_1C$ Равенство выполняется только когда точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой, иначе по неравенству треугольника $A_1C_1 < A_1B_1+B_1C_1$, таким образом, точки отрезка AC отображаются в точки отрезка A_1C_1.



б) $\angle AOB$ — лежит в плоскости a.

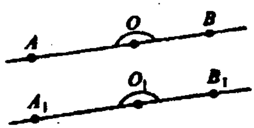
При движении $O \to O_1$, $A \to A_1$, $B \to B_1$, при этом $OA=O_1A_1$ и $OB=O_1B_1$ $AB=A_1B_1$ и $\Delta OAB = \Delta\, O_1A_1B_1$ по трем сторонам, тогда $\angle AOB=\angle A_1B_1C_1$.



Если $\angle AOB=180°$, то $\angle A_1O_1B_1=180°$.

Доказательство:

На сторонах развернутого угла возьмем точки A и B. При движении $A \to A_1$, $B \to B_1$, так что $AB=A_1B_1$, так что $AB=A_1B_1$; $O \to O_1$ при движении $AO=A_1O_1$ и $O_1B_1=OB$. Итак, $AO_1+O_1B_1=A_1B_1$.



Точки A_1, O_1, B_1 лежат на одной прямой, точки A_1 и .B_1 лежат по разные стороны от точки O_1, тогда, $\angle A_1O_1B_1$ — развернутый, т.е. Δ $A_1O_1B_1$ $=180°$, что и требовалось доказать.

488. а) Пусть $a \parallel b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$. Пересечем a и b прямой c, следовательно $\angle 1=\angle 2$ как внутренние накрест лежащие при параллельных a, b и секущей c. Примем следу-ющие обозначения (смотри рисунок):

M и N — произвольные точки, лежащие по разные стороны от секущей AB.

Вопросы к главе V

1. а) Лежит в одной из координатных плоскостей;

б) Лежит на одной из координатных осей.

2. Через данную прямую проведем плоскость, перпендикулярную к оси Oz. Тогда плоскость будет параллельна плоскости Oxy. Любая точка на прямой лежит в нашей плоскости, тогда каждая точка этой прямой имеет одну и ту же аппликату.

3. A (2; 4; 5), B (3; x; y), C (0; 4; z) и D (5; t; u).

а) Если точки лежат в плоскости, параллельной плоскости Oxy, то их координаты по оси z равны: y=5, z=5, u=5, x, t – любые числа;

б) если точки лежат в плоскости, параллельной плоскости Oxz, то их координаты по оси y равны: x=4, t=4; y, z, u – любые числа;

в) если точки лежат на прямой, параллельной оси Ox, то у них одни и те же координаты y и z: x=4, t=4 и y=z=u=5.

4. $\vec{AB}\ \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{BC}\ \{x_2; y_2; z_2\}$. $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$.

$\vec{AC}\ \{x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2)$. Тогда $\vec{CA}\ \{-x_1-x_2; -y_1-y_2; -z_1-z_2\}$.

5. а) сонаправлен с осью Oz;

б) перпендикулярен оси Ox;

в) перпендикулярен оси Oy.

6. Очевидно, что $\vec{a}$ лежит в плоскости Oyz.

а) пересекает плоскость;

б) перпендикулярен Ox.

7. а) $\vec{a}\ \{-5; 3; -1\}$ и $\vec{b}\ \{6; -10; -2\}$. $\frac{-5}{6} \neq \frac{3}{-10} \neq \frac{-1}{-2}$, тогда, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны;

б) $\vec{a}\ \{-2; 3; 7\}$; $\vec{b}\ \{-1; 1{,}5; 3{,}5\}$. $\frac{-2}{-1}=\frac{3}{1{,}5}=\frac{7}{3{,}5}=k$, векторы коллинеарны.

8. Пусть d — длина радиуса-вектора точки M. Тогда:

а) $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=d=1$,

$\sqrt{1+y^2+z^2}=1$, откуда y=z=0, точка M лежит на оси абсцисс, т.е. ответ Да.

б) $\sqrt{4+y^2+z^2}=1$; $4+y^2+z^2=1$,

$y^2+z^2=-3$ — невозможно, т.к. $y^2+z^2 \geq 0$, т.е. ответ Нет.

9. $|\vec{a}|=3$, $\quad |\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

а) $3=\sqrt{9+x^2+y^2}$, $\quad 9=9+x^2+y^2$, $0=x^2+y^2$, x=y=0, следовательно, может

б) $3=\sqrt{25+x^2+y^2}$, $\quad 9=25+x^2+y^2$, $x^2+y^2=-16$, что невозможно, следовательно, не может.

10. $M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, где $M_1(3;y_1;z_1)$, $M_2(6;y_2;z_2)$.

а) $2=\sqrt{9+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, $4=9+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$,

$(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=-5$ — противоречие. Таким образом, равенство $M_1M_2=2$ невозможно.

б) $3=\sqrt{9+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$, $9=9+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$

$(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=0$, отсюда $y_1=y_2$ и $z_1=z_2$, и отрезок M_1M_2 параллелен оси Ox.

11. $|\vec{a}|=a$, $|\vec{b}|=b$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\alpha$.

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab$, б) $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos 180°=-ab$;

в) $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos 90°=0$; г) $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos 60°=\frac{1}{2}ab$;

д) $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos 120°=ab\cos(180°-60°)=-ab\cos 60°=-\frac{1}{2}ab$.

12. а) $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, если $\cos\alpha>0$, т.е. $0°\le\alpha<90°$;

б) $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, если $\cos\alpha<0$, т.е. $90°<\alpha<180°$;

в) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, если $\cos\alpha=0$, т.е. $\alpha=90°$.

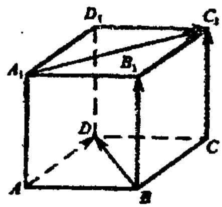
13. а) $AD\perp DC$, а $DC=D_1C_1$, таким образом $AD\perp D_1C_1$.

б) $BD\perp BB_1$, а $BB_1=CC_1$, следовательно, $BD\perp CC_1$;

в) $A_1C_1=AC$, AD не перпендикулярен AC, тогда, A_1C_1 и AD не перпендикулярны;

г) DB не перпендикулярен D_1C_1;

д) BB_1 не перпендикулярен AC.



14. а) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2+y_1y_2+z_1z_2$.

Если $2+y_1y_2+z_1z_2<2$, то, $y_1y_2+z_1z_2<0$, ответ: да может (например, $y_1=0$, $y_2=0$, $z_1=1$, $z_2=-1$);

б) $2+y_1y_2+z_1z_2=2$, т.е. $y_1y_2+z_1z_2=0$, ответ: да может (например, $y_1=y_2=z_1=z_2=0$);

в) $2+y_1y_2+z_1z_2>2$, т.е. $y_1y_2+z_1z_2>0$, ответ: да может (например, $y_1=y_2=z_1=z_2=1$)

15. $x=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$, $y=\frac{0-1}{2}=-\frac{1}{2}$; $z=\frac{2+4}{2}=3$; Ответ: $A\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};3\right)$

16. Плоскость проходит через точку $P\left(2;-\frac{1}{2};3\right)$.

17. При зеркальной симметрии – в левую.

При осевой – в правую.

При центральной – в правую.

Дополнительные задачи

490. а) Пусть $\vec{p}=3\vec{b}-3\vec{a}+3\vec{c}$, где $\vec{p}\{x; y; z\}$.

Тогда $3\vec{b}\{-15; 15; 0\}$, $-3\vec{a}\{15; 0; -15\}$, $3\vec{c}\{3; -6; -9\}$.

Тогда вектор $\vec{p}$ имеет координаты: $\vec{p}\{3; 9; -24\}$;

б) $\vec{p}=-0{,}1\vec{c}+0{,}8\vec{a}-0{,}5\vec{b}$,

$-0{,}1\vec{c}\{-0{,}1; 0{,}2; 0{,}3\}$, $0{,}8\vec{a}\{-4; 0; 4\}$, $-0{,}5\vec{b}\{2{,}5; -2{,}5; 0\}$.

Тогда $x=-0{,}1-4+2{,}5=-1{,}6$, $y=0{,}2-2{,}5=-2{,}3$, $z=0{,}3+4=4{,}3$; $\vec{p}\{-1{,}6; -2{,}3; 4{,}3\}$.

491. а) Координаты $\vec{a}\{-5; 3; -1\}$ не пропорциональны координатам $\vec{b}\{6; -10; -2\}$, т.е. $\frac{-5}{6}\neq\frac{3}{-10}$. Таким образом, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

б) Координаты $\vec{a}\{-2; 3; 7\}$ пропорциональны координатам вектора $\vec{b}\{-1; 1{,}5; 3{,}5\}$: $\frac{-2}{-1}=\frac{3}{1{,}5}=\frac{7}{3{,}5}$. Таким образом, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

в) Координаты вектора $\vec{a}\{-\frac{2}{3}; \frac{5}{9}; -1\}$ и $\vec{b}\{6; -5; 9\}$ пропорциональны:

$\frac{-\frac{2}{3}}{6}=\frac{\frac{5}{9}}{-5}=\frac{-1}{9}$, $-\frac{1}{9}=-\frac{1}{9}=-\frac{1}{9}$, т.е. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

г) Координаты вектора $\vec{a}\{0{,}7; -1{,}2; -5{,}2\}$ не пропорциональны координатам вектора $\vec{b}\{-2{,}8; 4{,}8; -20{,}8\}$:

$\frac{0{,}7}{-2{,}8}=-\frac{1}{4}$; $\frac{-1{,}2}{4{,}8}=-\frac{1}{4}$; $\frac{-5{,}2}{-20{,}8}=\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}\neq-\frac{1}{4}$, т.е. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

492. Пусть E (x; y; z) – середина AB.

Тогда: $x=\frac{1}{2}(-5+3)=-1$, $y=\frac{7-11}{2}=-2$, $z=\frac{3+1}{2}=2$, т.е. E (–1; –2; 2).

Вычислим координаты точки, ближайшей к точке E на оси Ox: E_1 (–1; 0; 0); на оси Oy: E_2 (0; –2; 0); на оси Oz: E_3 (0; 0; 2).

493. Для решения задачи установим, можно ли вектор $\vec{a}$ разложить по векторам $\vec{b}$ и $\vec{c}$, т.е. существуют ли m и n, удовлетворяющие условию $\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$.

а) $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{b}\{1; 1; 0\}$.

$\vec{c}=\vec{i}-\vec{k}$, $\vec{c}\{1; 0; -1\}$, где $\vec{i}\{1; 0; 0\}$, $\vec{j}\{0; 1; 0\}$, $\vec{k}\{0; 0; 1\}$.

Запишем равенство $\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$ в координатах:

(1) $-1=m\cdot1+n\cdot1$, (2) $2=m\cdot1+n\cdot0$, (3) $3=m\cdot0+n\cdot(-1)$.

Равенства (1), (2) и (3) выполняются при m=2, n=–3, т.е., векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

б) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{a}\{1; 1; 1\}$, $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{c}\{1; -1; 0\}$. Запишем равенство $\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$ в координатах:

(1) $1=m\cdot 2+n\cdot 1$, (2) $1=m\cdot 1+n\cdot(-1)$, (3) $1=m\cdot 1{,}5+n\cdot 0$.

$m=\frac{2}{3}$, $n=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$, $1=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}$.

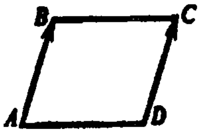
Равенства (1), (2) и (3) выполняются при $m=\frac{2}{3}$, $n=\frac{1}{3}$, т.е., векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

в) Запишем равенство $\vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$ в координатах.

(1) $1=m\cdot 1+n\cdot 2$, (2) $1=m\cdot(-1)+n\cdot 3$. $1=m\cdot 2+n\cdot(-1)$.

Система уравнений не имеет решений. Т.е. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны.

494. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$: $\overrightarrow{AB}\{1; 1; 1\}$, $\overrightarrow{DC}\{1; 1; 1\}$. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ коллинеарны, т.к. $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{DC}$, k=1. тогда, AB || DC.



$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

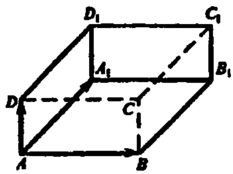
$|\overrightarrow{DC}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$,

$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$.

Противоположные стороны четырехугольника ABCD параллельны и длины их равны, таким образом, ABCD — параллелограмм.

495. Пусть точка O — точка пересечения медиан ΔABC, тогда ее координаты: $O\left(\frac{2+3+2}{3}; \frac{0+2+3}{3}; \frac{1+2+6}{3}\right)$, $O\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}; 3\right)$.

496. Запишем $\overrightarrow{AD}\{4; 1; 0\}$, $\overrightarrow{AA_1}\{2; 3; -1\}$, $\overrightarrow{AB}\{-1; 4; 3\}$.



$\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}$. $\overrightarrow{AD_1}\{2+4; 3+1; 0-1\}$, $\overrightarrow{AD_1}\{6; 4; -1\}$.

Запишем координаты вектора $\overrightarrow{AD_1}$ через коорди-наты его начала и конца:

$6=x_{D_1}-x_A$, $\quad 6=x_{D_1}-3$, $\quad x_{D_1}=9$.

$4=y_{D_1}-y_A$, $\quad 4=y_{D_1}-0$, $\quad y_{D_1}=4$,

$-1=z_{D_1}-z_A$, $\quad -1=z_{D_1}-2$, $\quad z_{D_1}=1$: $\quad D_1(9; 4; 1)$.

2) $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}$, $\vec{AC}\{-1+4;\ 4+1;\ 3+0\}$, $\vec{AC}\{3;\ 5;\ 3\}$.

Аналогично с (а)

$3=x_C-x_A$, $\quad 3=x_C-3$, $\quad x_C=6$,

$5=y_C-y_A$, $\quad 5=y_C-0$, $\quad y_C=5$,

$3=z_C-z_A$, $\quad 3=z_C-2$, $\quad z_C=5$; $\quad$ C (6; 5; 5).

3) $\vec{AB_1}$ $\{-1+2;\ 4+3;\ 3-1\}$, $\vec{AB_1}$ $\{1;\ 7;\ 2\}$.

Аналогично с (а)

$1=x_{B_1}-3$, $\quad x_{B_1}=4$,

$7=y_{B_1}-0$, $\quad y_{B_1}=7$,

$2=z_{B_1}-2$, $\quad z_{B_1}=4$, $\quad$ B_1 (4; 7; 4).

4) $\vec{AC_1}=\vec{AA_1}+\vec{AB}+\vec{AD}$, $\vec{AC_1}$ $\{2+(-1)+4;\ 3+4+1;\ -1+3+0\}$.

$\vec{AC_1}$ $\{5;\ 8;\ 2\}$.

Аналогично с (а)

$5=x_{C_1}-3$, $\quad x_{C_1}=8$,

$8=y_{C_1}-0$, $\quad y_{C_1}=7$,

$2=z_{C_1}-2$, $\quad z_{C_1}=4$, $\quad$ C_1 (8; 8; 4).

497. Пусть О — середина АВ

а) $x_o=\frac{1}{2}(2+5)$, $\quad$ б) $x_o=\frac{1}{2}(0+3)$, $\quad$ в) $x_o=\frac{1}{2}(5+3)$,

$y_o=\frac{1}{2}(3+7)$, $\quad y_o=\frac{1}{2}(4-8)$, $\quad y_o=\frac{1}{2}(3-5)$,

$0=\frac{1}{2}(k-1)$, $\quad 0=\frac{1}{2}(k+2)$, $\quad 0=\frac{1}{2}(k+3k)$,

т.е. $k=1$; $\quad$ т.е. $k=-2$; $\quad$ т.е. $k=0$.

498. Пусть единичный вектор $\vec{e}$ $\{x;\ y;\ z\}$ сонаправлен с вектором $\vec{a}$. Тогда $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{x}{-2}$, т.е. $y=\frac{x}{2}$; $z=-x$.

Т.к. $|\vec{e}|=1$, то $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$.

$\sqrt{x^2+\frac{x^2}{4}+(-x)^2}=1$, $\quad \sqrt{(2+\frac{1}{4})x^2}=1$; $\frac{3}{2}|x|=1$,

$x>0$, т.к. $\vec{e}$ и $\vec{a}$ сонаправлены; $x=\frac{2}{3}$, т.е. $\vec{e}$ $\{\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};-\frac{2}{3}\}$.

Пусть $\vec{e}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$. Тогда $\vec{e}$ лежит в плоскости Oxy, т.к. вектор $\vec{b}$ лежит в плоскости Oxy. $\vec{e}$ $\{x;\ y;\ 0\}$.

$\frac{x}{1}=\frac{y}{3}$, y=3x.

$|\vec{e}|=1$, $\sqrt{x^2+y^2}=1$, $x=\frac{1}{\sqrt{10}}$, $y=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Таким образом, $\vec{e}\ \{\frac{1}{\sqrt{10}};\ \frac{3}{\sqrt{10}};\ 0\}$.

499. $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=5$,

$x^2+y^2+z^2=25$, $4+y^2+5=25$, $y^2=16$, $y=\pm4$.

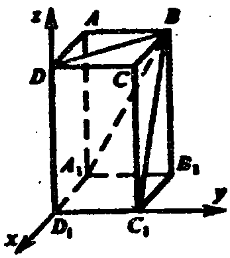
500. Пусть O — середина отрезка MN, S — середина отрезка PQ.

Тогда $O\ (\frac{2-4}{2};\frac{1-1}{2};\ \frac{3-1}{2};)$, $O\ (-1;\ 0;\ 1)$;

$S\ (\frac{1-3}{2};\frac{1+1}{2};\frac{2+0}{2})$; $S\ (-1;\ 1;\ 1)$.

$OS=\sqrt{(-1+1)^2+(1-0)^2+(1-1)^2}=\sqrt{1}=1$.

501. В прямоугольной системе координат построим прямоугольный параллелепипед так, чтобы оси координат совпали с его ребрами и точка B была одной из его вершин. Согласно рисунку



$A_1D_1=BC=|x_B|=2$, $D_1C_1=AB=|y_B|=5$,

$D_1D=B_1B=|z_B|=\sqrt{3}$.

Расстояния от точки B до́ осей координат — это диагонали: BA_1 — до оси Ox·, BC_1 — до оси Oy; BD — до оси Oz.

$BA_1=\sqrt{A_1B_1^2+BB_1^2}=\sqrt{25+3}=2\sqrt{7}$,

$BC_1=\sqrt{BC^2+CC_1^2}=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$,

$BD=\sqrt{BC^2+DC^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$.

502. Пусть D лежит на оси Oy и равноудалена от точек A и B; имеет координаты $D\ (0;\ y_D;\ 0)$, AD=BD. Тогда:

$AD=\sqrt{(x_A-x_D)^2+(y_A-y_D)^2+(z_A-z_D)^2}$.

$AD=\sqrt{(13-0)^2+(2-y_D)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{169+4-2\cdot2\cdot y_D+y_D^2+1}=$

$=\sqrt{4y_D^2-4y_D+174}$,

$BD=\sqrt{(-15-0)^2+(7-y_D)^2+(-18-0)^2}=\sqrt{225+49-2\cdot7\cdot y_D+y_D^2+324}=$

$=\sqrt{y_D^2-14\cdot y_D+598}$,

Запишем уравнение: $\sqrt{y^2-4y+174}=\sqrt{y^2-14y+598}$,

$y^2-4y+174=y^2-14y+598$, $10y=424$, $y=42{,}4$; Тогда D (0; 42,4; 0).

503*. Пусть O — центр описанной окружности; O (x; y, z). Тогда AO=BO=CO. Направляющие векторы сторон треугольника: $\vec{AB}$ {2; –1; –1}, $\vec{AC}$ {2; 0; 0}, $\vec{BC}$ {0; 1; 1}.

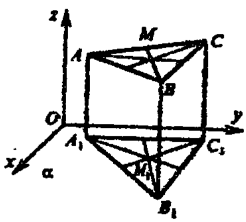
$\cos\angle BAC=\dfrac{|4-0-0|}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{4}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$; $\cos\angle ABC=\dfrac{|-1-1|}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{1+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

$\cos\angle ACB=\dfrac{|0|}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{1+1}}=0$, следовательно,;

$\angle ACB=90^\circ$ и ΔABC — прямоугольный. Тогда, точка O лежит на отрезке AB; AO=OB. Вычислим координаты точки O: $x=\dfrac{1}{2}(0+2)=1$.

$y=\dfrac{1}{2}(2+1)=1{,}5$, $z=\dfrac{1}{2}(2+1)=1{,}5$; O(1; 1,5; 1,5)

504. Введем прямоугольную систему координат Oxyz как показано на рисунке. Тогда $\Delta A_1B_1C_1$ — проекция ΔABC на плоскость Oxy; M_1 — проекция точки M. Следовательно, A (x_A; y_A; 4), B{x_B; y_B; 9), C (x_C; y_C; 5).



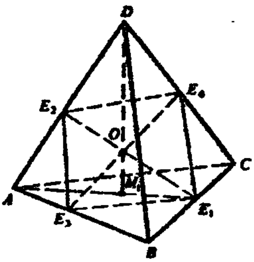
M — точка пересечения медиан ΔABC, M (x_M; y_M; z_M), (z_M — искомое расстояние от точки M до плоскости α).

Точка пересссчения медиан M имеет координаты:

$M\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_e+y_{_н}}{3};\dfrac{z_A+z_e+z_{_н}}{3}\right)$; т.е. $z_M=6$ дм.

505*. Пусть E_1, E_2, E_3, E_4 — середины ребер BC, AD, AB и DC. Точка O — середина отрезка E_1E_2; E_2E_3 — средняя линия грани ABD.

$E_2E_3=\dfrac{1}{2}DB$.



Аналогично $E_1E_4=\dfrac{1}{2}DB$. Тогда $E_4O=E_4E_1+$

$+E_1O=\dfrac{1}{2}DB+E_1O$, $OE_3=OE_2+E_2E_3=OE_2+\dfrac{1}{2}$ DB.

По условию $OE_2=E_1O$, тогда $E_4O=OE_3$, таким образом O — середина отрезка E_3E_4.

$\vec{DO}=\vec{DE_2}+\vec{E_2O}=\dfrac{1}{2}\vec{DA}+\dfrac{1}{2}\vec{E_2E_1}$. $\vec{E_2E_1}=\vec{E_2D}+\vec{DC}+\vec{CE_1}$

$\vec{E_2E_1}=\vec{E_2A}+\vec{AB}+\vec{BE_1}$.

Сложим эти два равенства. Получим

$2\vec{E_2E_1}=\vec{E_2D}+\vec{E_2A}+\vec{CE_1}+\vec{BE_1}+\vec{DC}+\vec{AB}=\vec{DC}+\vec{AB}$.

$\overrightarrow{E_2E_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB})$,

$\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{E_2E_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{DA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$;

(1) $\overrightarrow{DM_1}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE_1}=\overrightarrow{DA}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}((\overrightarrow{DB}-$

$-\overrightarrow{DA})+(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}))=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}-2\cdot\overrightarrow{DA})=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}=$

$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC})$, $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=3\overrightarrow{DM_1}$. (2)

Подставим (2) в (I):

$\overrightarrow{DO}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DM_1}$, значит, $\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DM_1}$, $\frac{\overrightarrow{DO}}{\overrightarrow{OM_1}}=\frac{3}{1}$.

Таким образом, точка $O \in DM_1$ и делит DM_1 в отношении 3:1, считая от вершины. Аналогично для других медиан.

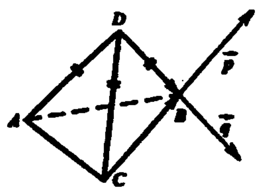
506. а) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1\cdot3+5\cdot0+6=3$;

б) $\vec{a}\cdot\vec{c}=-1\cdot\frac{1}{2}-3\cdot5+3\cdot4=-3,5$;

в) $\vec{d}\cdot\vec{d}=2^2+1^2+0=5$;

г) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\,\vec{d}=\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}+\vec{c}\cdot\vec{d}=-1\cdot2+5\cdot1+3\cdot0+2\cdot3+0+0+\frac{2}{2}-3+0=7$;

д) $(\vec{a}-\vec{b})(\vec{c}-\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}=-\frac{1}{2}-15+12-\frac{3}{2}+0-8+2-5+6=-10$.



507. а) $\angle ADB=45°=\overrightarrow{DA}\,\hat{}\,\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{BD}$,

$\overrightarrow{DA}\,\hat{}\,\overrightarrow{BD}=180°-45°=135°$.

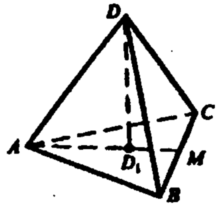
б) Отложим от точки B векторы $\vec{p}=\overrightarrow{CB}$ и $\vec{q}=\overrightarrow{DB}$.

$\overrightarrow{DB}\,\hat{}\,\overrightarrow{CB}=\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}=\angle DBC$.

Рассмотрим ΔDBC. $\angle BDC=60°$, DC=DB, тогда, $\angle DCB=\angle CBD$, т.к. треугольник равнобедренный.

$\angle DCB+\angle DBC=120°$, значит, $\angle DBC=\angle DCB=60°$, в) $\widehat{\overrightarrow{BD}\ \overrightarrow{BA}}=\angle DBA$. ΔDBA — равнобедренный, т.е.,

$\angle DAB=\angle DBA=\dfrac{180^\circ-45^\circ}{2}=\dfrac{135^\circ}{2}=67^\circ30'$.



508. По определению проекции прямая DD_1 перпендикулярна плоскости ABC, т.е. она перпендикулярна всем прямым, лежащим в этой плоскости.

а) $D_1D \perp D_1B$.

$\overrightarrow{D_1D}$ — направляющий вектор прямой D_1D;

$\overrightarrow{D_1B}$ — направляющий вектор прямой D_1B. Следовательно, $D_1B \perp D_1D$;

б) $\overrightarrow{DD_1}$ также направляющий вектор прямой D_1D, $DD_1 \perp (ABC)$, т.е. $DD_1 \perp BC$ $\overrightarrow{BC}$ — направляющий вектор прямой BC. Тогда, $\overrightarrow{DD_1} \perp \overrightarrow{BC}$. Т.к $D_1D=-DD_1$, то угол φ_1 между DD_1 и плоскостью ABC равен: $\varphi_1=180^\circ-\varphi$, где $\varphi=90^\circ$ — угол между D_1D и плоскостью ABC;

в) $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{BC}$ — направляющие векторы прямых DA и BC.

Если $\overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{BC}$, то $DA \perp BC$.

Т.к. тетраэдр ABCD — правильный, то его вершина D проектируется в центр ΔABC Если провести в ΔABC высоту AM, то высота тетраэдра DD_1 пересечется с высотой ΔABC в точке D_1, тогда

1) $CB \perp AM$, т.к. AM — высота ΔABC;

2) $CB \perp DD_1$, $DD_1 \perp (ABC)$;

3) AM и $DD_1 \in (DD_1A)$, прямые AM и DD_1 пересекаются.

Из 1), 2) и 3) следует, что CB перпендикулярна плоскости DD_1C, значит, $CB \perp DA$, $BC \perp DA$.

г) DC и D_1B не перпендикулярны, т.к. прямые DC и D_1B не перпендикулярны. Если бы $CD \perp D_1B$, то по теореме, обратной к т. о трех перпендикулярах, $CD_1 \perp D_1B$. Но это прямые, содержащие медианы правильного треугольника. Они не перпендикулярны.

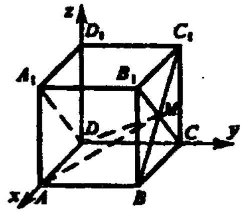
509. $\cos\varphi=|\cos \widehat{\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{CD}}|$.

а) $\overrightarrow{AB}\{1; 1; -2\}$, $\overrightarrow{CD}\{-3; 3; -1\}$.

$\cos\varphi=\dfrac{|-3+3+2|}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{9+9+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{19}}=\dfrac{2}{\sqrt{114}}$;

б) $\overrightarrow{AB}\{-5; 1; 1\}$, $\overrightarrow{CD}\{2; 2; -2)$.

$$\cos\varphi=\frac{|-10+2-2|}{\sqrt{25+1+1}\cdot\sqrt{4+4+4}}=\frac{10}{3\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{5}{9}.$$



510. Обоначим ребро куба через а. Тогда вершины куба имеют координаты: A (a; 0; 0), B (a; a; 0), C (0; a; 0), D (0; 0; 0), A_1 (a; 0; d), B_1 (a, a, a), C_1 (0; a; a), D_1 (0; 0; 0).

$$\cos\varphi=\frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

а) $\vec{AD}$ $\{-a; 0; -a\}$, M $(\frac{a}{2}; a; \frac{a}{2})$, $\vec{AM}$ $\{\frac{a-2a}{2}; a; \frac{a-2a}{2}\}$,

$$\cos(\vec{A_1D}\ \wedge\ \vec{AM})=\frac{\frac{-a(a-2a)}{2}-\frac{a^2}{2}}{\sqrt{a^2+a^2}\cdot\sqrt{\frac{(a-2a)^2}{4}+a^2+\frac{a^2}{4}}}=$$

$$=\frac{\frac{-a^2+2a^2-a^2}{2}}{\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{\frac{(a-2a)^2}{4}+a^2+\frac{a^2}{4}}}=0,\qquad \vec{A_1D}\ \wedge\ \vec{AM}=90^\circ$$

б) $\vec{MD}$ $\{\frac{a}{2}; -f; -\frac{a}{2}i\}$, $\vec{BB_1}$ $\{0; 0; a\}$,

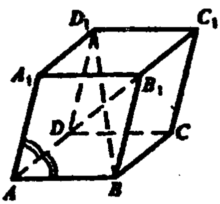
$$\cos(\vec{MD}\ \wedge\ \vec{BB_1})=\frac{-\frac{a^2}{2}}{\cdot\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2+\frac{a^2}{4}}\cdot\sqrt{a^2}}=-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{6a^2}{4}}\cdot a}=-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{2}{a^2\sqrt{6}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\vec{MD}\ \wedge\ \vec{BB_1}\approx 114^\circ06'$.

511. Найдем длины векторов $\vec{AC_1}$ и $\vec{BD_1}$.

$$\vec{AC_1}=\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CC_1}=\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1},$$



$$\vec{AC_1}\cdot\vec{AC_1}=|\vec{AC_1}|^2\cdot\cos 0^\circ,$$

$$(\vec{AB}+\vec{AD}\cdot\vec{AB}+\vec{AA_1}\cdot\vec{AB}+\vec{AB}\cdot\vec{AD}+\vec{AD}^2+$$

$$+\vec{AA_1}\cdot\vec{AD}+\vec{AB}\cdot\vec{AA_1}+\vec{AD}\cdot\vec{AA_1}+\vec{AA_1}^2=\vec{AB}^2+$$

$+2\vec{AD}\cdot\vec{AB}+2\vec{AA_1}\cdot\vec{AB}+\vec{AD}^2+2\vec{AA_1}\cdot\vec{AD}+$

$+\vec{AA_1}^2=1^2+2\cdot1^2\cdot\cos 60°+2\cdot1^2\cdot\cos 60°+1^2+2\cdot1^2\cdot\cos 60°+1^2=3+6\cdot\dfrac{1}{2}=6;$

$|\vec{AC_1}|^2=6;\ |\vec{AC_1}|=\sqrt{6};$

$\vec{BD_1}=\vec{BA}+\vec{AD}+\vec{DD_1}=\vec{AA_1}+\vec{AD}-\vec{AB},\ \vec{BD_1}^2=|\vec{BD_1}|^2\cdot\cos 0^0,$

$(\vec{AA_1}+\vec{AD}-\vec{AB})(\vec{AA_1}+\vec{AD}-\vec{AB})=|\vec{BD_1}|^2,$

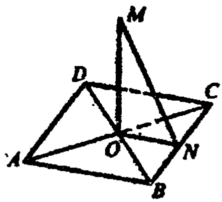
$\vec{AA_1}^2+\vec{AD}\cdot\vec{AA_1}-\vec{AB}\cdot\vec{AA_1}+\vec{AA_1}\cdot\vec{AD}+\vec{AD}^2-\vec{AB}\cdot\vec{AD}-\vec{AA_1}\cdot\vec{AB}-$

$-\vec{AD}\cdot\vec{AB}+\vec{AB}^2=\vec{AA_1}^2+2\vec{AD}\cdot\vec{AA_1}-2\vec{AB}\cdot\vec{AA_1}+\vec{AD}^2\ \vec{AD}^2-2\vec{AB}-\vec{AD}+$

$+\vec{AB}^2=1^2+2\cdot1^2\cdot\cos 60^0-2\cdot1^2\cdot\cos 60°-2\cdot1^2\cdot\cos 60°+1^2=3-\dfrac{2}{2}=2=|\vec{BD_1}|^2,$

$|\vec{BD_1}|=\sqrt{2}$

512. $DB\perp AC$, $AO=OC=4$, $DO=OB=3$.



$BC=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5,$

$BN=CN=2{,}5.$

$\cos\angle OBC=\dfrac{OB}{BC}=\dfrac{3}{5}$, $\cos\angle OCB=\dfrac{OB}{BC}=\dfrac{4}{5}$.

а) $\vec{MN}$ и $\vec{BC}$ — направляющие векторы прямых

MN и BC. Косинус угла между прямыми MN и BC равен $|\cos(\vec{MN}\ \hat{}\ \vec{BC})|$.

1) $\vec{MN}=\vec{MO}+\vec{OB}+\vec{BN}$, $\vec{BC}\cdot\vec{MN}=\vec{BC}\ (\vec{MO}+\vec{OB}+\vec{BN})=\vec{BC}\cdot\vec{MO}+$

$+\vec{BC}\cdot\vec{OB}+\vec{BC}\ \ \vec{BN}=-9+12{,}5=3{,}5$

$(\cos(\vec{BC}\ \hat{}\ \vec{OB})=-\cos\angle OBC=-\dfrac{3}{5}$; $\cos(\vec{BC}\ \hat{}\ \vec{MO})=0$, т.к. $MO\perp$ плоскости ABC).

2) $\vec{BC}\ \ \vec{MN}=|\vec{BC}|\cdot|\vec{MN}|\cdot\cos(\vec{BC}\ \hat{}\ \vec{MN})$,

$MN=\sqrt{MO^2+ON^2}=\sqrt{36+6{,}25}=6{,}5,$

где ON=BN=NC=2,5, т.к. в прямоугольном треугольнике OBC точка N является центром описанной окружности.

$\vec{BC}\cdot\vec{MN}=5\cdot6{,}5\cdot\cos(\vec{BC}\ \hat{}\ \vec{MN})=32{,}5\cdot\cos(\vec{BC}\ \hat{}\ \vec{MN}),$

$32{,}5 \cdot \cos(\vec{BC} \wedge \vec{MN})=3{,}5$, $\cos(\vec{BC} \wedge \vec{MN})=\frac{3{,}5}{32{,}5}=\frac{7}{65}$;

б) $|DC|=|BC|=5$. $\vec{MN}=\vec{MO}+\vec{OC}+\vec{CN}$,

$\vec{DC}\cdot\vec{MN}=\vec{DC}(\vec{MO}+\vec{OC}+\vec{CN})=\vec{DC}\cdot\vec{MO}+\vec{DC}\cdot\vec{OC}+\vec{DC}\cdot\vec{CN}$,

$\vec{DC}\cdot\vec{MO}=0$, т.к. $MO \perp DC$.

$\vec{DC}\cdot\vec{OC}=5\cdot 4\cdot\frac{4}{5}=16$, т.к. $\cos(\vec{DC} \wedge \vec{OC})=\cos\angle DCO=\cos\angle OCB=\frac{4}{5}$;

$\vec{DC}\cdot\vec{CN}=5\cdot 2{,}5\cdot\cos(180°-\angle DCN)=12{,}5(-\cos\angle DCN)=-12{,}5\cdot$

$\cdot\cos(2\cdot\angle OCB)=-12{,}5(2\cdot\cos^2\angle OCB-1)=-12{,}5\cdot 2\cdot\frac{16}{25}+12{,}5=12{,}5-16=-3{,}5$,

$\vec{DC}\cdot\vec{MN}=0+16-3{,}5=12{,}5$,

$\vec{DC}\cdot\vec{MN}=|\vec{DC}|\cdot|\vec{MN}|\cdot\cos(\vec{DC} \wedge \vec{MN})$,

$\cos(\vec{DC} \wedge \vec{MN})=\frac{12{,}5}{5\cdot 6{,}5}=\frac{125}{325}=\frac{5}{13}$;

в) $\vec{AC}\cdot\vec{MN}=(\vec{AB}+\vec{AD})(\vec{MO}+\vec{OB}+\vec{BN})=\vec{AB}\cdot\vec{MO}+\vec{AB}\cdot\vec{OB}+\vec{AB}\cdot\vec{BN}+$

$+\vec{AD}\cdot\vec{MO}+\vec{AD}\cdot\vec{BN}$, $\vec{AB}\cdot\vec{MO}=0$, т.к. $AB \perp MO$,

$\vec{AB}\cdot\vec{OB}=5\cdot 3\cdot\cos\angle OBA=15\cdot\cos\angle OBC=15\cdot\frac{3}{5}=9$,

$\vec{AB}\cdot\vec{BN}=5\cdot 2{,}5\cdot\cos(180°-\angle ABN)=12{,}5\cdot(-\cos\angle ABN)=-12{,}5\cdot\cos(2\cdot\angle OBC)=$

$=-12{,}5\cdot(2\cdot\cos^2\angle OBC-1)=-25\cdot\frac{9}{25}+12{,}5=12{,}5-9=3{,}5$,

$\vec{AD}\cdot\vec{OB}=\vec{BC}\cdot\vec{OB}=5\cdot 3\cdot(-\frac{3}{5})=-9$, $\vec{AD}\cdot\vec{MO}=0$.

$\vec{AD}\cdot\vec{BH}=\vec{BC}\cdot\vec{BN}=5\cdot 2{,}5=12{,}5$, $\vec{AC}\cdot\vec{MN}=0+9+3{,}5-9-0+12{,}5=16$,

$\vec{AC}\cdot\vec{MN}=|\vec{AC}|\cdot|\vec{MN}|\cdot\cos(\vec{AC} \wedge \vec{MN})$,

$\cos(\vec{AC} \wedge \vec{MN})=\frac{16}{8\cdot 6{,}5}=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$;

г) $\vec{DB}\cdot\vec{MN}=(\vec{DC}+\vec{CB})(\vec{MO}+\vec{OC}+\vec{CN})=\vec{DC}\cdot\vec{MO}+\vec{CB}\cdot\vec{MO}+\vec{DC}\cdot\vec{OC}+$

$+\vec{CB}\cdot\vec{OC}+\vec{DC}\cdot\vec{CN}$, $\vec{DC}\cdot\vec{MO}=0$.

$\vec{CB}\cdot\vec{MO}=0$, $\vec{DC}\cdot\vec{OC}=5\cdot 4\cdot\frac{4}{5}=16$,

$\vec{CB}\cdot\vec{OC}=5\cdot 4\cdot\cos(180°-\angle OCB)=5\cdot 4(-\frac{4}{5})=-16$,

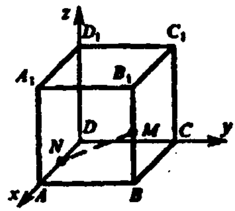
$\vec{DC}\cdot\vec{CN}=5\cdot 2{,}5\cdot\cos(180°-2\angle OCB)=-3{,}5$,

$\vec{CB}\cdot\vec{CN}=5\cdot 2{,}5\cdot 1=12{,}5$,

$\vec{DB}\cdot\vec{MN}=0+0+16-16-3{,}5+12{,}5=-3{,}5+12{,}5=9$,

$\vec{DB}\cdot\vec{MN}=|\vec{DB}|\cdot|\vec{MN}|\cdot\cos(\vec{DB}\,\hat{}\,MK)=6\cdot 6{,}5\cdot\cos(\vec{DB}\,\hat{}\,\vec{MN})$,

$\cos(\vec{DB}\,\hat{}\,\vec{MN})=\frac{9}{39}=\frac{3}{13}$.



513. Обозначим сторону куба через a. Введем прямоугольную систему координат как показано на рисунке. Задача сводится к нахождению $\cos(\vec{NM}\,\hat{}\,\vec{DA})$.

а) $N(\frac{3}{5}a;\ 0;\ 0)$, $A(a;\ 0;\ 0)$, $A_1(a;\ 0;\ a)$, $B(a;\ a;\ 0)$,

$B_1(a;\ a;\ a)$, $M(a;\ a;\ \frac{3}{5}a)$, $D(0;\ 0;\ 0)$; $\vec{NM}\{\frac{2}{5}a;\ a;\ \frac{3}{5}a\}$.

$\vec{DA}\{a;\ 0;\ 0\}$.

$$|\cos(\vec{NM}\,\hat{}\,\vec{DA})|=\frac{|\frac{2}{5}a^2+0+0|}{\sqrt{\frac{4}{25}a^2+a^2+\frac{9}{25}a^2}\cdot\sqrt{a^2}}=\frac{\frac{2}{5}a^2}{a^2\sqrt{\frac{4+25+9}{25}}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{38}{25}}}=\frac{2}{\sqrt{38}}.$$

б) Синус угла между прямой MN и плоскостью $A_1B_1C_1D_1$ равен $|\cos(\vec{NM}\,\hat{}\,\vec{AA_1})|$.

$$\vec{AA_1}\{0;\ 0;\ a\},\ |\cos(\vec{NM}\,\hat{}\,\vec{AA_1})|=\frac{|0+0+\frac{3}{5}a^2|}{a\sqrt{\frac{38}{25}}\cdot\sqrt{a^2}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{a^2}{a^2\sqrt{\frac{38}{25}}}=\frac{3}{\sqrt{38}}.$$

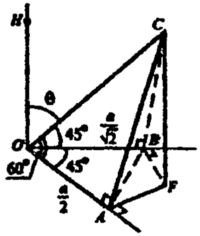
514. $\vec{a}\{|\vec{a}|\cos\varphi_1;\ |\vec{a}|\cos\varphi_2;\ |\vec{a}|\cos\varphi_3\}$, (смотри задачу 460)

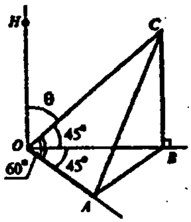
где φ_1, φ_2 и φ_3 — углы, которые $\vec{a}$ составляет с осями координат Ox, Oy, Oz.

$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ где x, y, z — координаты $\vec{a}$.

Тогда, $|\vec{a}|^2=x^2+y^2+z^2=|\vec{a}|^2\cos^2\varphi_1+|\vec{a}|^2\cos^2\varphi_2;\ |\vec{a}|^2\cos^2\varphi_3=|\vec{a}|^2(\cos^2\varphi_1+$ $+\cos^2\varphi_2+\cos^2\varphi_3)$, $\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2+\cos^2\varphi_3=1$, чот и требовалось доказать.

515.





Из точки C проведем прямую CF перпендикулярную плоскости AOB, в плоскости AOB проведем FA ⊥ OA, FB ⊥ OB. По теореме о трех перпендикулярах. CA ⊥ OA и CB ⊥ OB. Пусть OC=a, тогда из ΔCOA: OA=OC cos 60°=

$=\frac{a}{2}$, из ΔCOB OB=OC·cos 45°=$\frac{a}{\sqrt{2}}$

Для ΔAOB по теореме косинусов:

$AB^2=OB^2+OA^2-2\cdot OB\cdot OA\cos 45°$;

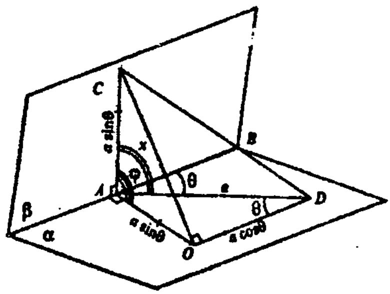
$AB^2=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}-2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{4}$, $AB=\frac{a}{2}$

Таким образом, ΔAOB — равнобедренный, OA=AB; ∠ABO=45° ∠OAB=90°

Тогда, FA совпадает с AB и C проектируется в точку B.

Прямые HO и CB перпендикулярны к плоскости ABO, т.е. они лежат в одной плоскости, ∠HOB=90°, ∠COB=45° таким образом, искомый угол θ=45°

516. CA ⊥ AB.



Из A проведем прямую OA ⊥ AB, ∠CAO=φ. Отложим AC=AO; построим отрезок CO, из точки O проведем луч, пересекающий луч AD в точке D, OD ∥ AB.

OD ∥ AB, а OA ⊥ AB, значит, OD ⊥ OA. По теореме о трех перпендикулярах. CO⊥OD.

Обозначим AD=a. Тогда в ΔAOD: AO=a sin θ, OD=a cos θ.

Из ΔOAC по теореме косинусов: $CO^2=OA^2+AC^2-2\cdot AC\cdot AO\cdot\cos\varphi$,

$CO^2=a^2\sin^2\varphi+a^2\sin^2\theta-2a^2\sin^2\theta\cos\varphi=2a^2\sin^2\theta(1-\cos\varphi)$.

В прямоугольном ΔCOD

$CD^2=OC^2+OD^2$;

$CD^2=2a^2\sin^2\theta(1-\cos\varphi)+a^2\cos^2\theta$.

В ΔCAD по теореме косинусов искомый ∠CAD=x,

$CD^2=CA^2+AD^2-2\cdot CA\cdot AD\cdot\cos x$.

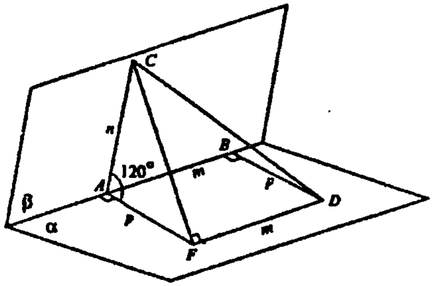
$2a^2\sin^2\theta(1-\cos\varphi)+a^2\cos^2\theta=a^2\sin^2\theta+a^2-2a^2\sin\theta\cos x$,

$2\sin^2\theta - 2\sin^2\theta\cos\varphi+\cos^2\theta=\sin^2\theta+1-2\sin\theta\cos x$,

$1-2\sin^2\theta\cos\varphi-1=-2\sin\theta\cos x$,

$2\sin^2\theta\cos\varphi=2\sin\theta\cos x$, $\sin\theta\neq0$,

следовательно, $\sin\theta\cos\varphi=\cos x$.



517. Через D проведем прямую, параллельно ребру AB; через точку A проведем прямую, перпендикулярную ребру AB; эти прямые пересекаются в точке F. Тогда $AF \perp FD$. Проведем отрезок CF и отрезок CD. По теореме о трех перпендикулярах $CF \perp FD$, а значит ΔCFD — прямоугольный.

AFDB — прямоугольник, $AF=BD=p$, $AB=FD=m$.

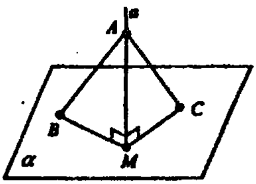
Для ΔCAF по теореме косинусов:

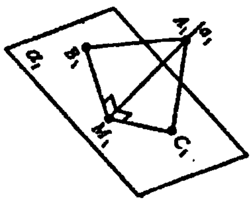
$CF^2=AC^2+AF^2-2\cdot AC\cdot AF\cdot\cos 120°=n^2+p^2-2\cdot n\cdot p\cos(180°-60°)=$
$=n^2+p^2+2\cdot n\cdot p\cdot\dfrac{1}{2}=n^2+p^2+np$.

В ΔCFD: $CD^2=CF^2+FD^2$, $CD^2=n^2+p^2+np+m^2$; $CD=\sqrt{n^2+p^2+m^2+np}$

518. а) по условию $a \parallel \alpha$, тогда все точки прямой находятся на одинаковом расстоянии от плоскости α. Предположим, что при движении a_1 не параллельна α_1, т.е. a_1 пересекает α_1, тогда точки прямой a_1 находятся на различных расстояниях от плоскости α_1, что противоречит тому, что при движении расстояние между точками сохраняется. Предположение неверно, т.е. $a_1 \parallel \alpha_1$.

б) Дано: В результате движения:





Пусть M — точка плоскости α, в которой a пересечет α. Возьмем произвольные точки $A\in a$, $B\in\alpha$, $C\in\alpha$.

ΔAMB и ΔAMC — прямоугольные треугольники; $AM^2=AB^2-BM^2=$
$=AC^2-CM^2$.

При движении $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $AM=A_1M_1$ (по доказанному в предыдущих задачах).

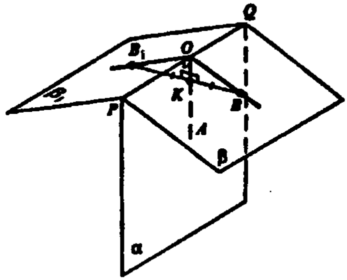
$A_1M_1{}^2=A_1B_1{}^2-B_1M_1{}^2$, значит, $A_1M_1\perp B_1M_1$.

$A_1M_1{}^2=A_1C_1{}^2-C_1M_1{}^2$, значит, $A_1M_1\perp C_1M_1$.

Таким образом, A_1M_1 перпендикулярна плоскости α_1 по признаку перпендикулярности прямой к плоскости.

519. $PQ\perp AO$, $AO\subset\alpha$ (смотри рисунок).

Возьмем на ребре двугранного угла PQ точку O; проведем прямую OB ⊥ PQ, $OB_1 \perp PQ$. $\angle BOA=\varphi$.

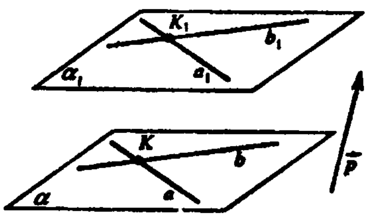


При зеркальной симметрии $B \in \beta \to B_1 \in \beta_1$, при этом $\alpha \perp B_1B$ и проходит через середину отрезка B_1B: $BK=B_1K$.

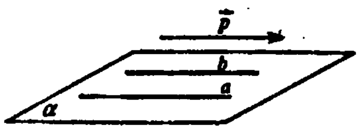
$\Delta B_1OK=\Delta BOK$, кроме того они прямоугольные ($OK \perp PQ$, OK — общий катет, $B_1K=KB$).

Тогда, $\angle BOK=\angle B_1OK=\varphi$, т.к. линейные меры двугранных углов равны, то и соответствующие двугранные углы между плоскостями α и β, α и β_1 тоже равны.

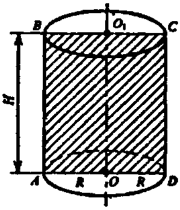
520. а) Возьмем в плоскости α точку K и проведем через нее две пересекающиеся прямые a и b. При параллельном переносе прямая b перейдет в параллельную ей прямую b_1, а прямая a — в параллельную ей прямую a_1. Т.к. a и b пересекаются, то a_1 и b_1 тоже пересекаются. Через a_1 и b_1 проведем плоскость α. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны. Тогда, $\alpha \parallel \alpha_1$, что и требовалось доказать.



б) проведем на плоскости α прямую $\vec{a} \parallel \vec{p}$ и $\vec{b} \parallel \vec{p}$. Известно, что прямая, параллельная $\vec{p}$ или содержащая $\vec{p}$, отображается на себя.

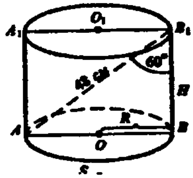


$b \to b$, $a \to a$. Через параллельные прямые a и b проходит единственная плоскость α, которая таким образом отображается сама на себя, что и требовалось доказать.



521. Докажем, что осевое сечение цилиндра — это прямоугольник (ABCD). Одно основание цилиндра получено из другого параллельным переносом, таким образом, BC=AD, т.к. параллельный перенос сохраняет расстояния. AB и CD перпендикулярны основаниям. AB=CD, как отрезки параллельных прямых, заключеные между двумя параллельными плоскостями, т.е. ABCD — прямоугольник R=1,5 м, P=4 м.

$AC=BD=\sqrt{H^2+(2R)^2}=\sqrt{H^2+D^2}=\sqrt{16+9}=5$ (см)

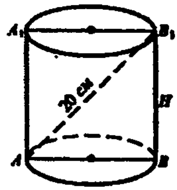


522. AA_1B_1B — прямоугольник (см.п.521).
Из ΔAB_1B:

$AB=2R=48\cdot\sin 60°=\dfrac{48\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}$ см; $R=12\sqrt{3}$ (см);

$H=B_1B=48\cdot\cos 60°=\dfrac{48}{2}=24$ см;

$S_{осн}=\pi R^2=\pi\,(12\sqrt{3}\,)^2=\pi\cdot 144\cdot 3=432\,\pi$ см^2.

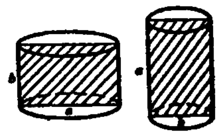


523. AA_1B_1B — квадрат, $AB_1=20$ см. $AB=H$;

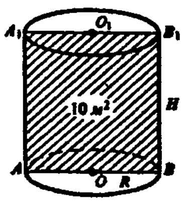
$H\sqrt{2}=20 \Rightarrow H=\dfrac{20}{\sqrt{2}}=\dfrac{20\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}$,

$H=10\sqrt{2}$, $S_{осн}=\pi R^2$, где $R=\dfrac{1}{2}\,AB=\dfrac{1}{2}\,H=5\sqrt{2}$,

$S_{осн}=\pi\,(5\sqrt{2}\,)^2=50\pi$ см^2.



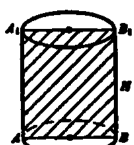
524. Нет.
Пример изображен на рисунке.



525.

$$\begin{cases} H\cdot 2R=10 \\ \pi\cdot R^2=5 \end{cases} \Rightarrow \quad R=\frac{10}{2H}=\frac{5}{H}, \quad \pi\left(\frac{5}{H}\right)^2=5,\ \frac{\pi\cdot 5}{H^2}=1$$

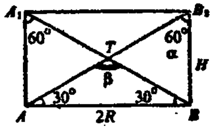
$$H=\sqrt{\left(\frac{1}{5\pi}\right)^{-1}}=\sqrt{5\pi}\ \text{м.}$$



526. $S_{осн}=\pi R^2$; $S_{сеч}=H\cdot 2R$, $\dfrac{S_{осн}}{S_{сеч}}==\dfrac{\sqrt{3}\cdot\pi}{4}$,

$$\frac{\sqrt{3}\cdot\pi}{4}=\frac{\pi R^2}{2HR}\Rightarrow\frac{R}{H}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

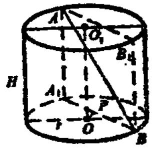
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2R}{H} \Rightarrow \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3},\ \ \alpha = 60^\circ.$$



$$\angle B_1AB = 30^\circ;\ \ \angle A_1BA = 30^\circ;$$

$$\angle\beta = 180^\circ - 2\cdot 30^\circ = 120^\circ;\ \ \angle ATA_1 = 60^\circ.$$

527. AB и O_1O — скрещивающиеся прямые.



а) 1. Построим плоскость, содержащую AB так, чтобы плоскость была параллельна O_1O. AA_1BB_1 — прямоугольник. $\rho(AB, OO_1)=\rho((AA_1B), OO_1)$.

Построим $OP \perp A_1B$, $\rho(AB, OO_1)=OP=d$. 2. $r=10$ дм, $d=8$ дм, $AB=13$ дм, $h=?$

$$A_1P = BP = \sqrt{r^2 - d^2},\ \ A_1B = \sqrt{r^2 - d^2},$$

$$A_1B = \sqrt{100-64} = 2\cdot 6 = 12\ (\text{дм}),$$

$$H = \sqrt{AB^2 - A_1B^2} = \sqrt{169-144} = 5\ \text{дм}.$$

б) $h=6$ см, $r=5$ см, $AB=10$ см, $d=?$

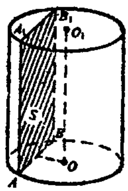
$$A_1B = \sqrt{AB^2 - h^2} = \sqrt{100-36} = 8\ \text{см}$$

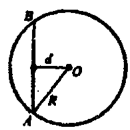
$A_1P = PB = 4$ см. Из $\Delta\, A_1OP$: $d = \sqrt{r^2 - A_1P^2} = \sqrt{25-16} = 3$ см.

528. Пусть π — секущая плоскость, $\pi \parallel O_1O$.

$O_1O \perp$ плоскостям оснований, тогда прямые AB и CD, по которым π пересечет боковую поверхность цилиндра, также перпендикулярны плоскостям оснований. Тогда ABCD — прямоугольник. Точка A переходит в точку B и точка D переходит в точку C.

529. AA_1B_1B — прямоугольник.



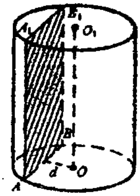


$$\frac{1}{2}AB = \sqrt{R^2 - d^2},\ \text{т.е.}\ AB = 2\sqrt{R^2 - d^2};$$

$$S = AB\cdot H = 2\sqrt{R^2 - d^2}\cdot H =$$

$$= 2\sqrt{25-9}\cdot 8 = 16\cdot 4 = 64\ \text{см}^2.$$

530. Пусть $H=12$ см, $R=10$ см, AA_1B_1B — квадрат. $AB=H=12$ см,



$$\frac{1}{2}AB = \sqrt{R^2 - d^2},\ \text{т.е.}\ \frac{12}{2} = \sqrt{100-d^2},\ \ 6 = \sqrt{100-d^2}$$

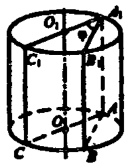
$$36 = 100 - d^2,\ \ d^2 = 64,\ \ d = 8\ \text{см}.$$

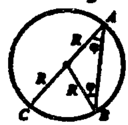
531. Пусть $H=10$ дм, $S_{сеч}=240$ дм^2, $d=9$ дм.

$S = H\cdot AB$; $240=10\cdot AB$, т.е. $AB=24$ дм

$$\frac{1}{2}AB = \sqrt{R^2 - d^2}\ \ \text{или}\ 12 = \sqrt{R^2 - 81},\ \ 144 = R^2 - 81\ \ \ 255 = R^2\ \ \ R = 15\ \text{дм}$$

532. $\angle BAC = \varphi$ — линейный угол двугранного угла CA_1AB.





Пусть R — радиус основания цилиндра, H — высота цилиндра.

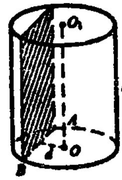
$$S_1 = S_{A_1C_1CA} = 2RH.$$

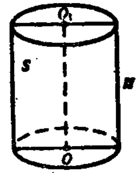
$$\frac{AB}{\sin(180^\circ - 2\varphi)} = \frac{R}{\sin\varphi}, \qquad \text{т.е.} \qquad \frac{AB}{2\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{R}{\sin\varphi};$$

$$AB = 2R\cos\varphi;\ S_2 = S_{A_1B_1BA} = AB \cdot H = 2R\cos\varphi H;$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2RH}{2RH\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}.$$

Ответ: $\frac{1}{\cos\varphi}$.



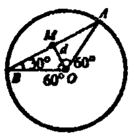


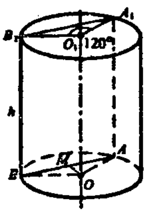
533. $S = 2RH$, или $R = \frac{S}{2H}$;

$$\frac{1}{2}AB = \sqrt{R^2 - d^2},\ \text{т.е.}\ AB = \sqrt{\frac{S^2}{4H^2} - d^2};$$

$$S_{сеч} = AB \cdot H = 2H\sqrt{\frac{S^2}{4H^2} - d^2} = \sqrt{S^2 - 4H^2d^2}.$$

534. Из ΔAOB: $AO = OB = R$.





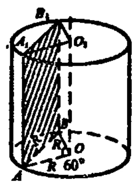
$$BM = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}d$$

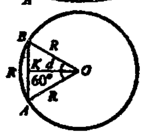
$$\text{тогда}\ \frac{BM}{d} = tg60^\circ = \sqrt{3};$$

$$2BM = 2\sqrt{3}d;\quad AB = 2\sqrt{3}d;$$

$$S = 2\sqrt{3}dh.$$

535. По условию: $d = 2$ см, $\angle AOB = 60^\circ$.





$$\frac{BK}{OK} = \frac{BK}{2} = \text{tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \text{тогда}\ BK = \frac{2}{\sqrt{3}};$$

$$AB = 2 \cdot BK = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ \text{см}.$$

AA_1B_1B — прямоугольник, $S = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot 10\sqrt{3} = 40$ см^2.

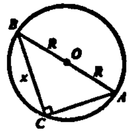
536. $\angle ACB$ — вписанный, т.к. $\angle ACB = 90^\circ$, то он опирается на диаметр.

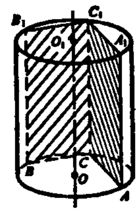
Пусть h — образущая, равная высоте цилиндра, R — радиус цилиндра, далее $BC = x$, тогда $AC = \sqrt{4R^2 - x^2}$.

$$S_1 = S_{BB_1C_1C} = S = xh = S_2 = S_{ACC_1A_1} = h\cdot\sqrt{4R^2 - x^2},$$

$\mathrm{xh} = \mathrm{h}\cdot\sqrt{4\mathrm{R}^2 - \mathrm{x}^2}$, или $\mathrm{x} = \sqrt{4\mathrm{R}^2 - \mathrm{x}^2}$, $\quad x^2 = 4R^2 - x^2$, $\quad 2x^2 = 4R^2$,

$x^2 = 2R^2$, $x = \sqrt{2}R$, $R = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.





Площадь осевого сечения

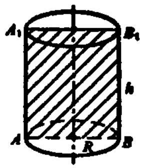
$S_3 = 2Rh = \dfrac{2xh}{\sqrt{2}}$. $S_3 = \sqrt{2}\cdot(xh) = \sqrt{2}S$.

Ответ: $\sqrt{2}S$.

537. По условию D=1м; H=πD.

$S_{бок} = 2\pi rH$, $r = \dfrac{1}{2}D = \dfrac{1}{2}$ (м), $H = \pi\cdot 1 = \pi$ м, $S_{бок} = 2\pi\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\pi = \pi^2$ м^2.

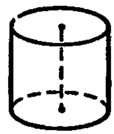
538. По условию $S_{бок} = S$,



$S_{бок} = 2\pi rh = S$, $2rh = \dfrac{S}{\pi}$; $S_{AA_1B_1B} = AB\cdot h = 2rh = \dfrac{S}{\pi}$.

539. $D = 1{,}5$ м, $H = 3$ м, на 1 м^2 — 200 г краски.

$S_{полн} + S_{осн} = 2\pi rh + \pi r^2 = S_{бака}$,



$S_{повбака} = \pi BP + \pi r^2 = \pi\cdot 1{,}5\cdot 3 + +\pi\left(\dfrac{1{,}5}{2}\right)^2 =$

$= \pi\cdot 4{,}5 + \pi\cdot\dfrac{2{,}25}{2} = 4{,}5\pi + 1{,}125\pi = 5{,}625\pi$.

Тогда количество краски: $0{,}2\cdot 5{,}625\pi = 1{,}125\pi$ кг.

540. По условию: $H - R = 12$,

$S_{полн} = 2\pi R(R + H) = 288\pi$ см^2. Запишем систему:

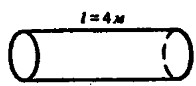
$\begin{cases}\mathrm{H} - \mathrm{R} = 12,\\ 2\pi\mathrm{R}(\mathrm{R}+\mathrm{H}) = 288\pi,\end{cases}$ $\qquad \begin{cases}\mathrm{H} - \mathrm{R} = 12,\\ 2\pi\mathrm{R}(\mathrm{R}+\mathrm{H}) = 144.\end{cases}$

$R^2 + R(12 + R) = 144$; $R^2 + 6R - 72 = 0$;

$R_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 + 72} = -3 \pm 9$.

Очевидно, $R > 0$, т.е. $R = 6$ см, $H = 12 + 6 = 18$ см.

541. По условию: $d = 20 = 0{,}2$ м,



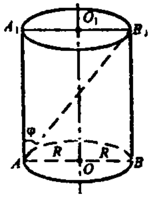
$S_{бок} = 2\pi\cdot r\cdot l = \pi\cdot d\cdot l$, $S_{шв} = \dfrac{2{,}5\pi d\cdot 1}{100}$,

$S_{бок} + S_{бок} = \pi\cdot 0{,}2\cdot 4 + \dfrac{2{,}5\pi d\cdot 0{,}2\cdot 4}{100} = 0{,}8\pi + \dfrac{0{,}8\pi d\cdot 2{,}5}{100} =$

$= 0{,}8\pi\left(1 + \dfrac{25}{100_{40}}\right) = 0{,}8\pi(1 + 0{,}025) = 0{,}82\pi$ м^2.

542. По условию: $S_{осн} = S;\ S = \pi R^2$

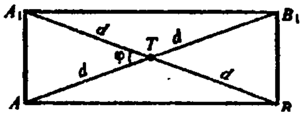
Пусть высота цилиндра h. Из ΔAA_1B_1.



$$\frac{2R}{h} = tg\varphi,\ R = \sqrt{\frac{S}{\pi}},\ h = \frac{2R}{tg\varphi} = ctg\varphi \cdot 2\sqrt{\frac{S}{\pi}},$$

$$S_{бок} = 2\pi Rh = 2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}} \cdot ctg\varphi \cdot 2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}} = 4\pi ctg\varphi\frac{S}{\pi} = 4Sctg\varphi.$$

Ответ: $4Sctg\,\varphi$.

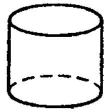


543. $S_{бок} = 2\pi Rh,\ S_{полн} = 2\pi R(h + R),$

$$AB = 2\pi Rh,\ R = \frac{AB}{2\pi} \cdot (1);\quad h = AA_1 \cdot (2)$$

Диагонали прямоугольника равны и в точке T делятся пополам (по свойствам прямоугольника).

Из ΔATA_1 по теореме косинусов имеем:



$$AA_1^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2\frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}\cdot\cos\varphi = \frac{2d^2}{4} - \frac{2d^2}{4}\cos\varphi =$$

$$= \frac{d^2}{2}(1 - \cos\varphi) = \frac{d^2}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = d^2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$AA_1 = \sqrt{d^2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = d\sin\frac{\varphi}{2},\ AA_1 = h.$$

Из ΔATB по теореме косинусов: $AB^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2\frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}\cdot\cos(180^\circ - \varphi) =$

$$= \frac{2d^2}{4} + \frac{2d^2}{4}\cos\varphi = \frac{d^2}{2}(1 + \cos\varphi) = \frac{d^2}{2}\cdot 2\cos^2\frac{\varphi}{2} = d^2\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

$$AB = \sqrt{d^2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = d\cos\frac{\varphi}{2};\ R = \frac{AB}{2\pi} = \frac{d\cos\frac{\varphi}{2}}{2\pi},$$

$$S_{бок} = 2\pi\frac{d\cos\frac{\varphi}{2}}{2\pi}\cdot d\sin\frac{\varphi}{2} = d^2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$= \frac{1}{2}d^2\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}d^2\sin\frac{\varphi}{2};$$

$$S_{осн} = \pi R^2 = \frac{\pi d^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{4\pi^2} = \frac{d^2}{4\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2};\quad S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн},$$

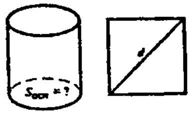
$$S_{полн} = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi + 2\frac{d^2}{4\pi}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{d^2}{2}\sin\varphi + \frac{d^2}{4\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2} = \frac{d^2}{2}(\sin\varphi + \frac{1}{\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2})$$

Если за основание принять AA_1, а за высоту — AB, то $S_{бок}$ не изменится.

$$S_{сеч} = \pi R^2 = \pi \frac{d^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\pi^2} = \frac{d^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\pi}$$

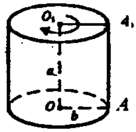
Ответ $S_{полн} = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi + 2 \frac{d^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4\pi} = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi + \frac{d^2}{2\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{2}$

544. $S_{осн} = \pi R^2$



Очевидно. сторона квадрата равна $\frac{d}{\sqrt{2}}$.

$\frac{d}{\sqrt{2}} = 2\pi R$, т.е. $R = \frac{d}{2\sqrt{2} \cdot \pi}$; $S_{осн} = \pi \frac{d^2}{8 \cdot \pi^2} = \frac{d^2}{8\pi}$



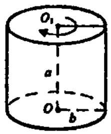
545. Пусть $R = OA = a \quad H = AA_1 = a$.

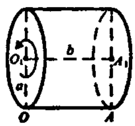
а) $S_{осевого\ сеч} = 2RH = 2aa = 2a^2$,

б) $S_{бок} = 2\pi RH = 2\pi aa = 2\pi a^2$,

в) $S_{полн} = 2\pi a^2 = 2(\pi a^2) = 4\pi a^2$

546. а)





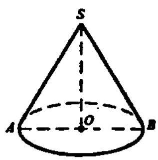
$S_{бок} = 2\pi ba \qquad S_{бок} = 2\pi ab$

$S_{бок}$ одинакова

б) $S_{полн} = 2\pi ba + 2\pi b^2 = S_1$, $S_2 = S_{полн} = 2\pi ab + 2\pi a^2$

$$\frac{S_1}{S} = \frac{2\pi b(a+b)}{2\pi a(a+b)} = \frac{a}{b}$$

Ответ $\frac{a}{b} = \frac{S_1}{S_2}$



547. По условию $SO = h = 15$ см $\quad R = OA = 8$ см,

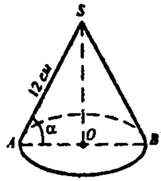
$AS = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = = \sqrt{225 + 64} = 17$ см

548. а) $\alpha = 30^\circ$ по условию

$R = AO = AS \cos\alpha = AS \cos 30^\circ = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ см.

$S_{осн} = \pi R^2 = \pi(6\sqrt{3})^2 = 36\ 3\ \pi = 108\pi$ см^2;

б) $\alpha = 45^\circ$ по условию $R = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} 6\sqrt{2}$ см,

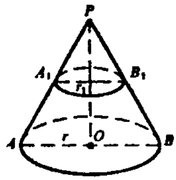


$S_{осн} = \pi \cdot (6\sqrt{2})^2 = 72\pi$ см^2;

в) $\alpha = 60^\circ$ по условию $R = 12 \cdot \frac{1}{2} 6$ см^2

$S_{осн} = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$ см^2

549. По условию $PO = h = 8$ дм.



а) $S_1 = \frac{1}{2} S_{осн}$; б) $S_1 = \frac{1}{4} S_{осн}$.

Плоскость, параллельная основанию, пересекается с ко-нусом по окружности и разбивает конус на две части.

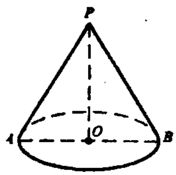
$\Delta PO_1A_1 \sim \Delta POA$; $\frac{PO_1}{PO} = \frac{O_1A_1}{OA}$, $\frac{PO_1}{8} = \frac{r_1}{r}$

$S_{кр} = \pi r^2$,

$r^2 = \frac{S_{кр}}{\pi}$, $\quad \frac{PO_1}{8} = \frac{\sqrt{\frac{S_1}{\pi}}}{\sqrt{\frac{S_{осн}}{\pi}}} = \sqrt{\frac{S_1}{S_{осн}}}$

а) $PO_1 = 8\sqrt{\frac{S_1}{S_{осн}}} = 8\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ дм; б) $PO_1 = 8\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{8}{2} = 4$ дм;

550. Пусть $\angle APB = 90^\circ$, $AO = OB = 5$ см, $S_{\Delta APB} = ?$

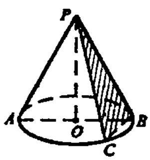


$S_{\Delta APB} = \frac{1}{2} AP \cdot PB = \frac{1}{2} AP^2$,

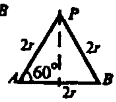
$2AP^2 = AB^2$ (по теореме Пифагора), $AB = 10$ см.

$AP^2 = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 4 = 50$ см^2, тогда $S_{\Delta APB} = \frac{50}{2} = 25$ см^2

551. а) Обозначим $\angle BPC = 30^\circ$, $PC = PB = 2r$



Осевое сечение



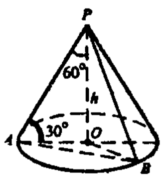
$S_{BPC} = \frac{1}{2} PB \cdot PC \cdot \sin 30^\circ$, $S_{BPC} = \frac{2r \cdot 2r}{2 \cdot 2} = r^2$,

б) Дано $\angle BPC = 45^\circ$

$S_{BPC} = \frac{2r \cdot 2r \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2} = r^2\sqrt{2}$;

в) Дано $\angle BPC = 60^\circ$, $S_{BPC} = \frac{2r \cdot 2r \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = r^2\sqrt{3}$

552. Дано $PO = h$, $\angle APO = 60^\circ$, $AP \perp PB$, PB — образующая.



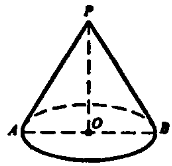
1) $AP = 2h$. (PO — катет, лежащий против угла в 30°);

2) $AP = PB = 2h$ — как образующие конуса.

3) ΔAPB прямоугольный.

$$S_{APB} = \frac{1}{2} AP \cdot PB \quad S = \frac{2h \cdot 2h}{2} = 2h^2.$$

553. Дано: APB — осевое сечение. $S_{APB} = 6$ дм², $S_{осн} = 8$ дм²



1) $S_{APB} = \frac{1}{2} PO \cdot AB \quad AB = 2r$

$$S_{APB} = \frac{PO \cdot 2r}{2} = rh, \; 6 = rh; \; (1)$$

2) $S_{осн} = \pi r^2 \quad 8 = \pi r^2; \; (2)$

3) из (2) $r = \sqrt{\frac{8}{\pi}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$; из (1) $h = \frac{6}{r} = \frac{6\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ дм.

554. Дано BC — хорда, стягивает угол а) в $60°$; б) в $90°$. $S_{сеч} = ?$

Проведем OK ⊥ CB и соединим точки P и K. По теореме о трех перпендикулярах. PK ⊥ CB. PK — высота треугольника BPC.

$$S_{сеч} = S_{BPC} = \frac{1}{2} CB \cdot PK$$

а) BC=r.

Из ΔPOK: $PK = \sqrt{PO^2 + OK^2}$, из ΔCPK: $PK = \sqrt{CP^2 - CK^2}$

$$PK = \sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4l^2 - r}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{4l^2 - r^2}}{2}.$$

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{4l^2 - r^2}}{2} = \frac{r}{4} \cdot \sqrt{4l^2 - r^2};$$

б) $CB = r\sqrt{2}$; $PK = \sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2l^2 - r^2}}{\sqrt{2}}$

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sqrt{2l^2 - r^2}}{\sqrt{2}} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{2l^2 - r^2}.$$

555. Дано: OP=h=10 см, BC — хорда,

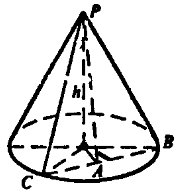
$\angle COB = 60°$, двугранный угол между плоскостью основания и плоскостью BPC равен: а) $30°$; б) $45°$; в) $60°$. $S_{BPC} = ?$

Построим линейный угол данного двугранного угла. Проводим OA ⊥ BC, строим отрезок PA. По теореме о трех перпендикулярах PA⊥BC.

$\begin{matrix} OA \perp BC \\ PO \perp PAO \end{matrix}$, поэтому ∠PAO — линейный угол двугранного угла.

а) $\angle PAO=30°$. Из ΔPOA: $PA=\dfrac{h}{\sin 30°}=2h$, из

ΔCOB: $BC=r=2CA$,



$\dfrac{CA}{OA}=tg30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $CA=\dfrac{OA}{\sqrt{3}}$.

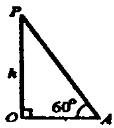
Из ΔPOA: $\dfrac{h}{OA}=tg30°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $OA=h\sqrt{3}$.

Итак, $CA=\dfrac{h\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=h$, $BC=2h$. $S_{сеч}=\dfrac{1}{2}BC\cdot PA$. $S_{сеч}=\dfrac{1}{2}2h\cdot 2h=2h^2$,

$S_{сеч}=2\cdot 100=200$ см^2.

б) $\angle PAO=45°$. $PA=h\sqrt{2}$ см $=10\sqrt{2}$ см, $OA=h$, $CA=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$,

$BC=\dfrac{2h}{\sqrt{3}}$; $S_{сеч}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2h}{\sqrt{3}}\cdot h\sqrt{2}=\dfrac{h^2}{3}\cdot\sqrt{6}=\dfrac{100}{3}\sqrt{6}$ см^2.



в) $\angle PAO=60°$; $\dfrac{h}{OA}=tg60°=\sqrt{3}$; $OA=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$,

$CA=\dfrac{OA}{\sqrt{3}}=\dfrac{h}{(\sqrt{3})^2}=\dfrac{h}{3}$ см, $CB=\dfrac{2h}{3}$ см, $PA=\dfrac{h}{\sin 60°}=\dfrac{h\cdot 2}{\sqrt{3}}$ см.

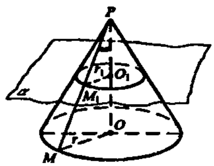
$S_{сеч}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2h}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2h}{3}=\dfrac{2h^2}{3\sqrt{3}}=\dfrac{2h^2}{9}$ см^2. $S_{сеч}=\dfrac{2\sqrt{3}\cdot 100}{9}=\dfrac{200\sqrt{3}}{9}$ см^2.

556. Дано: $\alpha \perp$ оси конуса РО.

Докажем, что

1) сечение конуса плоскостью α будет кругом с центром в точке O_1;

2) $r_1=\dfrac{PO_1}{PO}r$



Возьмем некоторую точку $M_1\in\alpha$ и точку $M_1\in O_1(r_1)$. (на плоскости α строим окружность с центром в точке O_1 и радиуса r и на этой окружности выбираем произвольную точку M_1).

Через точку P и точку M_1 проводим прямую PM_1, которая пересечет плоскость основания конуса в точке М. $\Delta PO_1M_1 \sim \Delta POM$ как прямоугольные, имеющие одинаковый острый угол.

$\dfrac{PO_1}{PO}=\dfrac{O_1M_1}{PO}=\dfrac{PM_1}{PM}$; $OM=\dfrac{PO\cdot O_1M_1}{PO_1}=\dfrac{PO}{PO_1}\cdot r_1=r=const$ при заданной точке Р и окружности $O_1(r_1)$.

Тогда: точка М — произвольная, значит, все точки луча PM_1, пересекающие плоскость основания конуса, лежат на окружности O(r), т.е. равноудачены от некоторой точки O на расстояние r, что видно из формулы. PM — образующая конуса по определению.

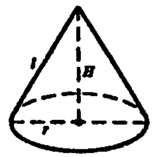
4 Образующие составляют коническую поверхность, поэтому докажем, что существует произвольная точка $M_1 \in \alpha$, $M_1 \in PM$ такая, что $M \in O_1(r_1)$.

5) $\Delta PO_1M_1 \sim \Delta POM$ (PM — образующая).

$O_1M_1 = \frac{PO_1}{PO} \cdot OM = \frac{PO_1}{PO} \cdot r = r_1 = const$ при заданной точке P и r

Тогда эта окружность будет сечением боковой поверхности, а круг, границей которого является $O_1(r_1)$, будет сечением конуса плоскостью α

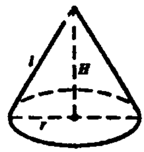
557. См. рисунок к задаче 556: $\frac{O_1M_1}{OM} = \frac{PO_1}{PO}$, или



$\frac{r_1}{r_2} = \frac{PO_1}{PO}$ $\quad S_1 = \pi r_1^2, \quad S_2 = \pi r_2^2$

Запишем отношение: $\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{PO_1^2}{PO^2}$ $\quad \frac{\frac{S_1}{\pi}}{\frac{S_2}{\pi}} = \frac{PO_1^2}{PO^2}$

558. 1) $S_{бок} = \frac{\pi l^2 \alpha}{360^\circ} = \pi r l,$



2) $l = \sqrt{r^2 + H^2} = \sqrt{9+16} = 5$ (см);

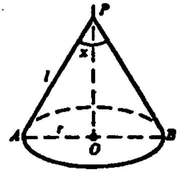
3) $\frac{\pi \cdot 25 \cdot \alpha}{360^\circ} = \pi \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow \alpha = \frac{360^\circ \cdot \pi \cdot 3 \cdot 5}{\pi \cdot 25} = 72^\circ \cdot 3 = 216^\circ$

559. $r = l\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \quad r = \frac{1}{2}$

$S_{бок} = \frac{\pi l^2 \alpha}{360^\circ} = \pi \cdot r \cdot l$

Вычислим градусную меру дуги α $\alpha = \frac{360^\circ \cdot \pi \cdot l \cdot l}{\pi \cdot l^2 \cdot 2} = 180^\circ$

560. Обозначим $\angle APO = x$.



$\frac{\pi l^2 \alpha}{360^\circ} = \pi \cdot r \cdot l$, где $l = AP$ $\quad r = OA$.

$r = \frac{\pi l^2 \alpha}{360^\circ \cdot \pi l} = \frac{\alpha l}{360^\circ}$

а) $r = \frac{180^\circ \cdot l}{360^\circ} = \frac{1}{2}$; б) $r = \frac{90^\circ \cdot l}{360^\circ} = \frac{1}{4}$; в) $r = \frac{60^\circ \cdot l}{360^\circ} = \frac{1}{6}$

Из ΔAPO: $\sin x = \dfrac{AO}{PA} = \dfrac{r}{l}$.

а) $\sin x = \dfrac{1}{2}$, $x = 30°$, $\angle APB = 2x = 60°$;

б) $\sin x = \dfrac{1}{4}$, $x = \arcsin\dfrac{1}{4}$, $\angle APB = 2\arcsin\dfrac{1}{4}$;

в) $\sin x = \dfrac{1}{6}$, $x = \arcsin\dfrac{1}{6}$, $\angle APB = 2\arcsin\dfrac{1}{6}$.

561. По условию $r = 9$ см, $\varphi = 120°$.

Пусть ℓ — длина дуги сектора, получающегося в результате развертки конуса.

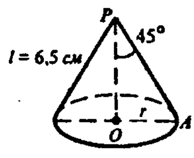
$$\ell = \frac{2\pi r\varphi}{360°} = \frac{2\pi\cdot 9\cdot 120°}{360°} = 6\pi$$

С другой стороны ℓ — это длина окружности основания конуса, тогда радиус основания $R = \dfrac{\ell}{2\pi} = \dfrac{6\pi}{3\pi} = 3$ см.

Тогда $S_{осн} = \pi r^2 = 9\pi$ см^2.

$$H = \sqrt{r^2 - R^2} = \sqrt{81-9} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ см.}$$

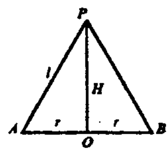
562. ΔAOP — равнобедренный;



$$r = OA = l\sin 45° = \frac{6{,}5\cdot\sqrt{2}}{2}, \quad S_{бок} = \pi r l$$

$$S_{бок} = \pi\cdot\frac{6{,}5\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot 6{,}5 = {}^{169}\!/_{8}\,\pi\sqrt{2} \text{ см}^2$$

563. Дано: $H = 1{,}2$ см, $S_{сеч} = 0{,}6$ см^2



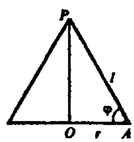
1) $S_{полн} = \pi r(l + r)$;

2) $S_{APB} = \dfrac{1}{2}AB\cdot PO = \dfrac{1}{2}\cdot 2r\cdot H = r\cdot H$,

$$0{,}6 = r\cdot 1{,}2r = \frac{0{,}6}{1{,}2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ см;}$$

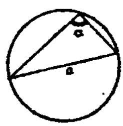
$$l = \sqrt{H^2 + r^2}, \quad l = \sqrt{1{,}44 + 0{,}25} = \sqrt{1{,}69} = 1{,}3 \text{ см;}$$

4) $S_{полн} = \pi\cdot 0{,}5(0.5 + 1{,}3) = \pi\cdot 0{,}5\cdot 1{,}8 = 0{,}9\pi$ см^2



564. По теореме синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2r$, следовательно, $r = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$

$\dfrac{r}{l} = \cos\varphi$, следовательно $l = \dfrac{r}{\cos\varphi}$,



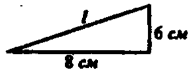
$l = \dfrac{a}{2\sin\alpha\cos\varphi}$. $S_{полн} = \pi r(r+l)$, тогда

$$S_{полн} = \pi\cdot\frac{a}{2\sin\alpha}\left(\frac{a}{2\sin\alpha}+\frac{a}{2\sin\alpha\cos\varphi}\right)=$$

$$=\frac{\pi a}{2\sin\alpha}\ \frac{a^2}{2\sin\alpha}\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\varphi}\right)=\frac{\pi a^2(1+\cos\varphi)}{4\sin^2\alpha\cos\varphi}.$$

565. При вращении получим коническую поверхность

$S_{бок} = \pi rl$, $S_{полн} = \pi r(l+r)$.



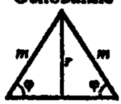
$l = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = 10$ (см);

$S_{бок} = \pi\cdot 8\cdot 10 = 80\pi$ (см^2);

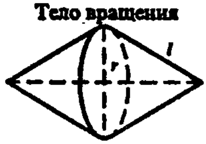
$S_{полн} = \pi\cdot 8(10+8) = 18\cdot 8\cdot\pi = 144\pi$ (см^2)

566. $S_{бок} = 2S_{бок} = \pi rl$.

Основание



Тело вращения

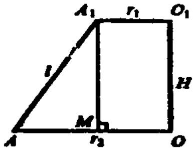


$r = m\sin\varphi$, $l = m$,

$S_{бок} = \pi m\sin\varphi\cdot m = \pi m^2\sin\varphi$;

$S_{пов} = 2\pi m^2\sin\varphi$.

567. Дано: $r_1 = 3$ см, $r_2 = 6$ см, $H = 4$ см.

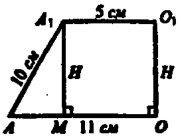


Проведем $A_1M \perp OA$.

$A_1M=H=4$ см, $AM=3$ см,

$A_1A = \sqrt{H^2+AM^2} = \sqrt{16+9} = 5$ (см).

568. Проведем $A_1M \perp OA$.



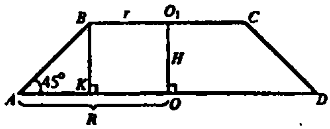
$A_1M=O_1O=H$ см, $AM=6$ см

а) $H = \sqrt{10^2-6^2} = \sqrt{100-36} = 8$ см;

б) $S_{сеч}=S_{трапеции}$ $S_{AA_1O_1O} = \dfrac{5+11}{2}\cdot 8 = 16\cdot 4 = 64$ см^2,

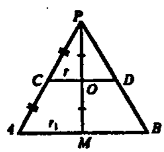
$S_{сеч} = 128$ см^2

569. Осевое сечение усеченного конуса — равнобедренная трапеция с основаниями $2r$ и $2R$. Вычислим высоту трапеции $OO_1=H$. $AK=R - r$, ΔABK — прямоугольный равнобедренный, $BK=O_1O=H=R - r$.



$$S_{ABCD} = \frac{BC+AD}{2}\cdot H = \frac{2r+2R}{2}\cdot(R-r) = =(R+r)(R-r) = R^2-r^2$$

570. Дано $S_{бок} = 80$ см^2, $PO = OM$, $CD \perp PM$.



$S_{бок} = \pi(r+r_1)l$, где $r = OC$, $r_1 = MA$, $l = CA$. CO — средняя линия в ΔAPM, $AC=CP$.

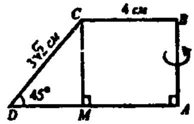
$S_{бок} = \pi r_1 AP$ Обозначим $AC = CP = l$, тогда

$\pi r_1 \cdot 2l = 80$, или $\pi r_1 l = 40$ (*). $\Delta POC \sim \Delta PMA$

$$\frac{PO}{PM}=\frac{OC}{MA}=\frac{PC}{PA}:\ \frac{r}{r_1}=\frac{l}{2l} \Rightarrow \frac{r}{r_1}=\frac{1}{2},\ r=\frac{r_1}{2}.$$

Из (*) $l=\frac{40}{\pi r}$; $S_{бок}=\pi(\frac{r_1}{2}+r_1)\frac{40}{\pi r_1}=\frac{\pi\cdot 3r_1\cdot 40}{2\pi r_1}=60$.

571. Пусть $CB = r_1$, $AD = r$, $l = DC$, $H = BA$.



Проведем $CM \perp DA$.

Из ΔDCM: $DM = 3\sqrt{2}\cos 45° = \frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 3$;

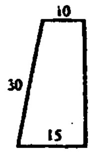
$DA = r = 3 + 4 = 7$ см.

$S_{бок} = \pi(r + r_1)l$; $S_{бок} = \pi(4+7)3\sqrt{2} = \pi\cdot 11\cdot 3\sqrt{2} = 33\sqrt{2}\pi$ см^2;

$S_{полн} = S_{бок} + \pi(r_1^2 + r_2^2)$,

$S_{полн} = 33\sqrt{2}\pi + \pi(16+49) = 33\sqrt{2}\pi + 65\pi$.

572. Дано: 1 м^2 – 150 г, N=100 ведер.

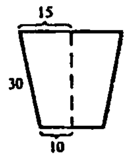


$S_{бок} = \pi(r + r_1)l$,

$S_{осн} = \pi r_1^2$, $S_{полн} = [\pi(10+15)30 + \pi\cdot 10^2]\cdot 2 =$

$= 2[\pi\cdot 25\cdot 30 + 100\pi] = 2\pi[750 + 100] = 850\cdot 2\pi = 1700\pi$ см^2;

1 м – 100 см, 1 м^2 – 10^4 см^2, xм^2 – 1700π см^2,

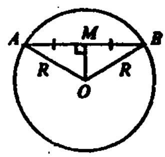


$x = \frac{1700\pi}{100\cdot 100} = 0{,}17\pi$ м^2.

$S = 0{,}17\pi$ м^2; $100S = 17\pi$ м^2.

Расход краски составит: $0{,}15\cdot 17\pi = 2{,}55\pi$ кг≈8,012 кг

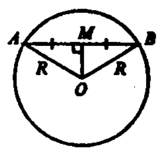
573. Через три точки проходит единственная плоскость, то есть через точки A, B и O. Сечение — это окружность, проходящая через центр сферы.



а) Проведем радиусы OA и OB. ΔAOB — равнобедренный, OM — медиана. Тогда, OM также и высота, то есть $OM \perp AB$.

б) Если $OM \perp AB$, то $\Delta OMA = \Delta OMB$. (OM — общий катет, OA=OB=R). тогда, MA=MB, точка M — середина AB.

574. Проведем секущую плоскость через точки A, B и O. Сечение серы этой плоскостью будет окружностью радиуса R с центром в точке O. OM — медиана в равнобедренном ΔAOB, поэтому $OM \perp AB$.



а) R=50 см, AB=40 см.

$AM = \frac{1}{2}AB = 20$ см.

Из ΔAOM: $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - AM^2} = \sqrt{50^2 - 20^2} =$

$= \sqrt{2500-400} = \sqrt{2100} = 10\sqrt{21}$ см;

б) R=15 мм, AB=18 мм.

$$OM = \sqrt{R^2 - (\frac{1}{2}AB)^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ мм};$$

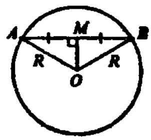
в) R=10 дм, OM=60 см, найти AB. OM=60 см=6 дм.

$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ дм}, \quad AB = 2AM = 16 \text{ дм};$$

г) R=a, OM=b.

$$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - OM^2} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

575. Проведем плоскость через точки A, B и точку O — центр сферы. В сечении получим окружность радиуса R, проходящая через центр сферы. В равнобедренном ΔOAB проведем $OM \perp AB$. OM — высота в равнобедренном треугольнике, таким образом, OM — медиана, $MA = MB = \frac{m}{2}$. OM — искомое расстояние.



$$OM = \sqrt{OA^2 - MA^2} = \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}} = \frac{\sqrt{4R^2 - m^2}}{2}.$$

576. а) $A(2;-4;7)$, $R = 3$.

$x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - (z - z_o)^2 = R^2$ имеем:

$x - 2)^2 + (y + 4)^2 - (z - 7)^2 = 9;$

б) $A(0;0;0)$, $R = \sqrt{2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2;$ аналогично (а)

в) $A(2;0;0)$, $R = 4$, $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 16$, аналогично (а).

577. а) $A(-2;2;0)$, $N(5;0;-1)$.

Уравнение сферы с центром в точке $C(x_o;y_o;z_o)$ имеет вид.

$x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 - (z - z_o)^2 = R^2$.

В нашем случае оно имеет вид: $(x+2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = R^2$.

Т.к. точка N лежит на сфере, то ее координаты удовлетворяют данному равнению:

$(5+2)^2 + (0-2)^2 + (-1)^2 = R^2$, $49 + 4 + 1 = R^2$, $R^2 = 54$,

поэтому уравнение сферы имеет вид: $(x+2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 54;$

а) $A(-2;2;0)$, $N(0;0;0)$. $(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 = R^2$

$(x+2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = R^2$.

$(0+2)^2 + (0-2)^2 + 0^2 = R^2$, $4 + 4 = R^2$, $R^2 = 8$.

Уравнение имеет вид: $(x+2)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 8$;

б) $A(-2;2;0)$, $N(5;3;1)$.

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=R^2$, $x^2+y^2+z^2=R^2$

$5^2+3^2+1^2=R^2$, $25+9+1=35$, $R^2=35$

Уравнение имеет вид: $x^2+y^2+z^2=35$.

578. а) $x^2+y^2+z^2=49$.

$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2=R^2$, где R — радиус сферы, $(x_o;y_o,z_o)$ — координаты точки С, центра сферы. В нашем случае

$x-x_o=x$; $y-y_o=y$; $z-z_o=z$, поэтому $x_o=0$; $y_o=0$, $z_o=0$,

а $R=\sqrt{49}=7$. Координаты центра (0;0;0), радиус: 7.

б) $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+z^2=2$.

$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2=R^2$, $x-3=x-x_o$, $x_o=3$;

$y+2=y-y_o$, $y_o=-2$; $z-z_o=z$, $z_o=0$; $2=R^2$, $R=\sqrt{2}$

Координаты центра: (3;–2;0), радиус: $\sqrt{2}$.

579. а) $x^2-4x+y^2+z^2=0$,

$x^2+y^2+z^2-4x-4=(x^2-4x+4)+y^2+z^2-4=0$,

$(x-2)^2+y^2+z^2=2^2$ – уравнение сферы.

Координаты центра (2; 0; 0), радиус: 2;

б) $x^2+y^2+z^2-2y=24$, $x^2+(y^2-2y+1)-1+z^2=24$,

$x^2+(y-1)+z^2=25=5^2$

Координаты центра (0; 1; 0), радиус: 5;

в) $x^2+2x+y^2+z^2=3$, $(x^2+2x+1)-1+y^2+z^2=3$,

$(x+1)+y^2+z^2=4=2^2$ — уравнение сферы с центром (01; 0; 0), радиус 2.

г) $x^2-x+y^2+3y+z^2-2z=2{,}5$,

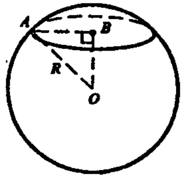
$$\left(x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\left(y^2-2\cdot\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}+(z^2-2z+1)-1=2{,}5,$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-1)^2=2{,}5+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+1=2{,}5+\frac{10}{4}+1=$$

$$=2{,}5+2{,}5+1=5+1=6=(\sqrt{6})^2,$$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-1)^2=(\sqrt{6})^2$ — уравнение сферы; в точке с координатами $\left(\frac{1}{2};+\frac{3}{2};1\right)$ расположен ее центр, радиус равен $\sqrt{6}$

580. Сечение шара плоскостью — это круг. OB $\perp$ плоскости сечения, OB=9 дм, OA=R.



Из прямоугольного треугольника OBA:

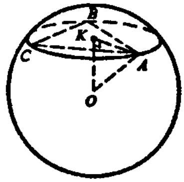
$$AB=\sqrt{OA^2-OB^2}=\sqrt{R^2-OB^2}=$$

$$=\sqrt{41^2-9^2}=\sqrt{1681-81}=\sqrt{1600}=40 \text{ дм.}$$

Площадь круга в сечении:

$$S=\pi(AB)^2=\pi\cdot 40^2=1600\pi \text{ дм}^2.$$

581. Плоскость треугольника ABC пересекает сферу с центром в точке O по окружности, которая описана около ΔABC. Из точки O проведем OK перпендикулярно плоскости ABC, OK — искомое расстояние, точка K — центр описанной около ΔABC окружности. Соединим точку K с одной из вершин ΔABC, например, с A, проведем радиус в точку A.



ΔOKA — прямоугольный, тогда по теореме Пифагора:

$$OK=\sqrt{OA^2-KA^2}=\sqrt{13^2-AK^2}.$$

Найдем длину AK.

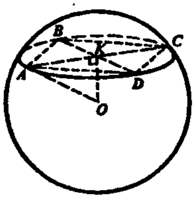
$$AK=\frac{AB\ CB\cdot CA}{4\cdot S_{\Delta ABC}},\ S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-CA)},$$

$$p=\frac{6+8+10}{2}=12,\ S=\sqrt{12\cdot 6\cdot 4\cdot 2}=\sqrt{6\cdot 2\cdot 6\cdot 4\cdot 2}=6\cdot 2\cdot 2=24 \text{ см}^2,$$

$$AK=\frac{6\cdot 8\cdot 10}{4\cdot 24}=\frac{24\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{24\cdot 4}=5 \text{ см}, OK=\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12 \text{ см.}$$

582. Плоскость прямоугольника пересекает сферу по окружности, которая будет описанной около прямоугольника ABCD. Центр окружности находится в точке пересечения диагоналей прямоугольника. Пусть O — центр сферы, следовательно OK $\perp$ плоскости ABCD, OK — искомое расстояние.

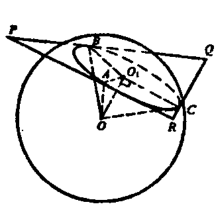
Из прямоугольного ΔOKA вычислим OK:



$$OK=\sqrt{OA^2-AK^2}=\sqrt{R^2-AK^2}.$$

$$AK=\frac{16}{2}=8 \text{ см},\ OK=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{100-64}=6 \text{ см.}$$

583. Равнобедренный ΔPQR «положили» на сферу, он касается сферы в точках A, B, C. Проведем из центра сферы O перпендикуляр OO_1 на плоскость PQR.



$O_1A \perp PR$, $O_1B \perp PQ$, $O_1C \perp RQ$. (По теореме о трех перпендикулярах O_1A, O_1B, O_1C перпендикулярны к сторонам треугольника PQR).

$\Delta OO_1A=\Delta OO_1B=\Delta OO_1C$ (прямоугольные, где O O — общий катет. OA=OB=OC=R).

Тогда: точка O_1 — центр вписанной окружности.

Вычислим радиус вписанной окружности:

$$r=\frac{S_{\Delta PQR}}{p},\quad p=\frac{10+10+12}{2}=16\text{ см.}$$

По формуле Герона: $S_{\Delta PQR}=\sqrt{16\cdot 6\cdot 6\cdot 4}=4\cdot 6\cdot 2=48\text{ см}^2$,

$$r=\frac{48}{16}=3\text{ см.}$$

По теореме Пифагора из $\Delta\, OO_1B$ найдем OO_1

$$OO_1=\sqrt{OB^2-O_1B^2}=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4\text{ см.}$$

584. см.538, за иключением: вместо ΔPQR будет ΔABC. Рассуждения повторяются; точка O_1 — центр вписанной в ΔABC окружности. Пусть ее радиус равен r.

$$r=\frac{S_{\Delta ABC}}{p},\quad p=\frac{13+14+15}{2}=\frac{42}{2}=21\text{ см.}$$

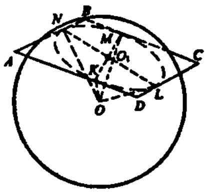
По формуле Герона: $S=\sqrt{p(p-13)(p-14)(p-15)}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=$

$$=\sqrt{7\cdot 3\cdot 4\cdot 2\cdot 7\cdot 2\cdot 3}=7\cdot 3\cdot 2\cdot 2=84\text{ см}^2$$

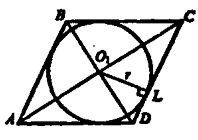
$$r=O_1F=\frac{84}{21}=4\text{ см}$$

Из прямоугольного ΔOO_1F по теореме Пифагора:

$$OO_1=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{9}=3\text{ см.}$$



585. Из центра сферы — O, опустим перпендикуляр OO_1 к плоскости ABCD. Проведем $O_1L \perp DC$, $O_1M \perp BC$, $O_1N \perp AB$, $O_1K \perp AD$. (По теореме о трех перпендикулярах OL, OM, ON, OK перпендикуляр-ны к соответствующим сторонам ромба). $\Delta OO_1L=\Delta OO_1K=\Delta OO_1N=\Delta OO_1M$ (прямоугольные, O_1O — общий катет, OK=OL=ON=OM=R). Тогда, $O_1K=O_1L=O_1N=O_1M$, точка O_1 равноудалена от сторон ромба, таким образом O_1 — центр вписанной в ромб окружности. Пусть ее радиус равен r Тогда из ΔOO_1L:



$$OO_1=\sqrt{OL^2-O_1L^2}=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{100-r^2}$$

Вычислим r. BD=15 см, AC=20 см.

$$CD=\sqrt{O_1C^2+O_1D^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}AC\right)^2+\left(\frac{1}{2}BD\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{AC^2+BD^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{225+400}=\frac{\sqrt{625}}{2}=\frac{25}{2}\text{ (см).}$$

$$S_{\Delta O_1CD}=\frac{1}{2}CD\cdot O_1L=\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{2}\cdot r.$$

С другой стороны $S_{\Delta O_1CD} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{8} \cdot 20 \cdot 15.$

Запишем уравнение:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15$, $R = \frac{20 \cdot 15}{2 \cdot 25} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 3}{2 \cdot 25} = 6$ см,

$O_1O = \sqrt{100 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ см.

586. Запишем уравнение:

$x^2 + y^2 = R^2 - d^2$,

где R — радиус сферы, d — расстояние от ее центра до плоскости α.

а) R=6 дм, d=OH=60 см=6 дм. OH — высота тетраэдра, тогда, OH $\perp$ плоскости ABC и OH=d.

R=d. Сфера и плоскость имеют одну общую точку, т.е. касаются.

б) R=3 м, OH=d=95 см=0,95 м. $R > d$, $R^2 - d^2 > 0$.

$x^2 + y^2 = R^2 - d^2$ — это уравнение окружности на плоскости ABC. Значит, сфера и плоскость основания тетраэдра пересекаются по окружности.

в) R=5 дм, d=OH=45 см=4,5 дм.

$R > d$, $R^2 - d^2 > 0$.

Как и в б) — сфера и плоскость пересекаются.

г) R=3,5 дм, OH=d=4 дм. $R < d$, $R^2 - d^2 < 0$.

$x^2 + y^2 = R^2 - d^2$ не имеет решений, т.е. плоскость ABC и сфера не имеют общих точек.

587. Если R > d, то секущая плоскость и сфера пересекаются по окружности радиуса $r = \sqrt{R^2 - d^2}$. В сечении будет окружность, площадь которой $S = \pi r^2 = \pi(R^2 - d^2)$ (круг, соответствующий окружности r).

а) R=12 см, d=8 см. R > d, секущая плоскость и сфера пересекаются.

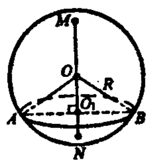
$r^2 = R^2 - d^2$, $r^2 = 12^2 - 8^2 = 144 - 64 = 80$, $S = \pi 80 = 80\pi$ см^2.

б) S=12 см^2, d=2 см. $S = \pi R^2 - \pi d^2$; $\pi R^2 = S + \pi d^2$,

$R = \sqrt{\frac{\pi d^2 + S}{\pi}} = \sqrt{d^2 + \frac{S}{\pi}}$, $R = \sqrt{4 + \frac{12}{\pi}}$ см.

588. $OO_1 = O_1N = \frac{R}{2}$ Пусть $AO_1 = O_1B = r$.

Тогда из прямоугольного ΔAOO_1:

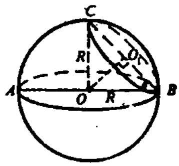


а) $r = \sqrt{R^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

б) Площадь боковой поверхности прямого кругового конуса вычислим по формуле:

$S_{бок} = \pi r l \quad l = OA = R \; . \; S_{бок} = \pi r R = \pi \dfrac{R\sqrt{3}}{2} R = \dfrac{\pi R^2\sqrt{3}}{2}$

589. Опустим перпендикуляр OO к плоскости сечения, соединим точку O_1 с точками B и C (точка C получается в результате продолжения отрезка BO_1 до пересечения со сферой)



ΔCOB — равнобедренный, в нем $OO_1 \perp CB$, тогда, OO_1 тоже является медианой, $CO_1=O_1B$

Точка O_1 равноудалена от точек C и B, лежащих на окружности, по которой сечение пересекает сферу. Точка O_1 — центр окружности, $\angle OBO_1 = \alpha$. Пусть $O_1B = r$, тогда

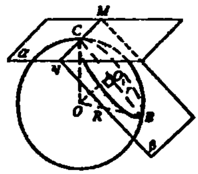
а) $R = 2$ см, $\alpha = 30°$

Из $\Delta OO_1B \quad O_1B = r = R\cos 30° = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \quad L = 2\pi r \quad L = \dfrac{2\pi R\sqrt{3}}{2} = \pi\sqrt{3}R = 2\sqrt{3}\pi$ см

б) $R = 5$ м, $\alpha = 45° \quad r = R\cos 45° = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$,

$L = 2\pi r = 2\pi \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \pi\sqrt{2}R = 5\sqrt{2}\pi$ м.

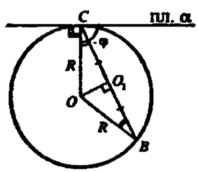
590. C — точка касания плоскости α со сферой; плос-кость с — касательная к сфере; β образует с α угол φ; β пересекается с шаром по окружности, диаметр которой CB



Построим $OO_1 \perp CB$, соединим точку O с точками C и B $\Delta OO_1C = \Delta OO_1B$ (прямоугольные, OO_1 - общий катет, $OC = OB = R$). Тогда, $CO_1 = O_1B$, точка O_1 — центр окружности, по которой плоскость β пересекает шар

Построим сечение шара плоскостью COB.

φ - угол между плоскостями α и β.

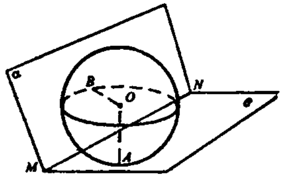


$\angle OCB = 90° - \varphi$ поскольку ΔBOC — равнобедренный, то $\angle OBO_1 = 90° - \varphi$.

Из $\Delta OO_1B \quad O_1B = r = R\cos(90° - \varphi) = R\sin\varphi$.

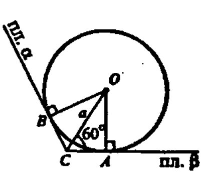
Площадь сечения шара $S = \pi r^2 \quad S = \pi(R\sin\varphi)^2 = \pi R^2 \sin^2\varphi$.

591. Построим сечение плоскостью, проходящей через центр шара, (точку O), и перпендикулярной ребру двугранного угла MN. Тогда построенная плоскость перпендикулярна α и β. Проведем OB перпендикулярно к плоскости α и OA перпендикулярно к плоскости β. $OB = OA = R$



OA ⊥ β. AC ⊥ MN (по построению).

OC⊥MN — по теореме о трех перпендикулярах.



OC — расстояние от центра сферы до ребра MN, OC=a. ΔOBC=ΔOAC (OB=OA=R, OC — общая), тогда OC — биссектриса угла ∠ACB, ∠ACB=120°,

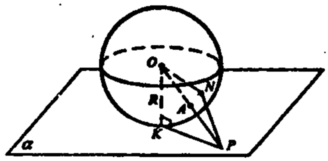
тогда, ∠OCA=60°. Из ΔOCA имеем: $OA = R = a\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

AB — расстояние между точками касания.

ΔAOB — равнобедренный, ∠OCA=60°, тогда, ∠OBA=∠OAB=60°,

ΔAOB — равносторонний, AB=OA=$\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

592. α — касательная плоскость к сфере, $P \in \alpha$, KP=15 см, OK=OA=R=112 см. Докажем, что точка $A \in OP$ будет ближайшей точкой к точке P.



Выберем произвольную точку N на сфере. Проведем отрезки NO и NP. По свойству сторон треугольника:

$ON + NP > OP,\ \ OP = OA + AP,\ \ R + NP > R + AP,\ \ NP > AP.$

Итак, $AP < NP$, а далее так как точка N выбрана произвольно, то утверждение доказано. Из прямоугольного ΔOKP имеем:

$OP = \sqrt{OK^2 + KP^2} = \sqrt{R^2 + 15^2} = \sqrt{112^2 + 15^2} = \sqrt{12544 + 225} =$

$= \sqrt{12769} = 113$ см, $AP = OP - R = 113 - 112 = 1$ см.

593. $S = 4\pi R^2$

а) $S = 4\pi \cdot 6^2 = 4\pi \cdot 36 = 144\pi$ см^2;

б) $S = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$ см^2;

в) $S = 4\pi \cdot (\sqrt{2})^2 = 8\pi$ м^2;

г) $S = 4\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 = 4\pi \cdot 12 = 48\pi$ см^2.

594. $S_{сеч} = 9 = \pi R^2$, $R^2 = \frac{9}{\pi}$ м^2; $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{9}{\pi} = 36$ м^2.

595. $S = 324$ см^2, $S = 4\pi R^2$, $R = \sqrt{\frac{324}{4\pi}} = \sqrt{\frac{81}{\pi}} = \frac{9}{\sqrt{\pi}}$ см.

596. Первая сфера: $S_1 = 4\pi R_1{}^2$. Вторая сфера: $S_2 = 4\pi R_2{}^2$

Множитель 4π одинаковый, тогда, S_1 пропорционально $R_1{}^2$, S_2 пропорционально $R_2{}^2$.

Доказано.

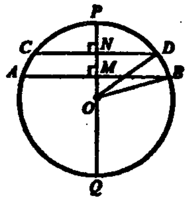
597. $S_{сф} = 4\pi R^2$, $R = 5$ м, $S_{сф} = 4\pi \cdot 5^2 = 100\pi$ м^2;

$S = \pi L^2$, L — радиус круга. $\pi L^2 = \pi \cdot 100$, $L^2 = 100$, $L = 10$ см.

598. Проведем диаметр сферы перпендикулярно к данным параллельным сечениям. Через диаметр проведем секущую плоскость. Она пересечет сферу по окружности, радиус которой равен радиусу сферы.

$ND = r_1 = 9$ см, $MB = r_2 = 12$ см, $NM = 3$ см, $OD = OB = R$.

Из прямоугольного ΔOBM по теореме Пифагора



$OM = \sqrt{R^2 - 12^2} = \sqrt{R^2 - 144}.$

Из ΔODN: $ON = \sqrt{R^2 - 9^2} = \sqrt{R^2 - 81}.$

$MN = NO - MO = \sqrt{R^2 - 81} - \sqrt{R^2 - 144},$

$\sqrt{R^2 - 81} - \sqrt{R^2 - 144} = 3,$

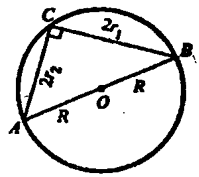
$\sqrt{R^2 - 81} = 3 + \sqrt{R^2 - 144},$

$R^2 - 81 = 9 + 6\sqrt{R^2 - 144} + R^2 - 144;$ $6\sqrt{R^2 - 144} = 54,$ $\sqrt{R^2 - 144} = 9,$

$R^2 - 144 = 81,$ $R = 15$ см

$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 15^2 = 900\pi$ см^2.

599. Рассмотрим сечение сферы плоскостью, проходящей через следующие три точки:



1) общую точку двух сечений, из которой под углом 90° выходят радиусы r_1 и r_2;

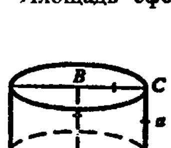
2) конец радиуса r_1;

3) конец радиуса r_2;

Угол $\angle ACB$ — вписанный, т.к. он равен 90°, то он опирается на диаметр сферы, то есть AB=2R.

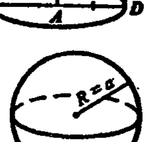
$(2R)^2 = (2r_1)^2 + (2r_2)^2;$ $4R^2 = 2r_1{}^2 + 2r_2{}^2;$ $R^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2$ Площадь сферы $S = 4\pi R^2 = 4\pi(r_1{}^2 + r_2{}^2)$.

600. Цилиндр получен в результате вращения квадрата ABCD вокруг стороны AB; AB=a.



$S_{сф} = 4\pi a^2;$ $S_{осн} = \pi a^2;$

$S_{бок} = 2\pi \cdot AD \cdot AB = 2\pi \cdot a \cdot a = 2\pi a^2;$



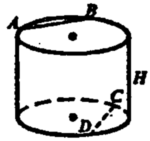
$S_{полн} = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\pi a^2 + 2\pi a^2 = 4\pi a^2$

Тогда: $S_{полн\ цил} = S_{сф}$. Доказано.

Вопросы к главе VI

1. 90°

2. Сечение — прямоугольник.



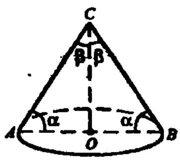
3. AB и CD лежат в параллельных плоскостях.

$\rho(AB, CD) = H$, — высота цилиндра.

4. Первая деталь	Вторая деталь
$2l$	l — высота (образующая),
$\frac{r}{2}$	r — радиус основания,
$S_{бок} = 2\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot 2l = 2\pi l$.	$S_{бок} = 2\pi rl$,
$S_{осн} = \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \pi\frac{r^2}{4}$.	$S_{осн} = \pi r^2$,
$2S_{осн} = \frac{\pi r^2}{2}$.	$2S_{осн} = 2\pi r^2$.

Боковые поверхности равны, но площадь двух оснований второй детали больше площади двух оснований первой детали.

5.



а) да;

б) да.

6.

Равнобедренный треугольник.

7.

Да.

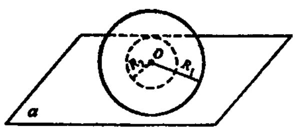
8. $R = \sqrt{5}$ см, $D = 2R = 2\sqrt{5} = \sqrt{20}$ см.

Вычислим гипотенузу прямоугольного треугольника:

$C = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16 + 8} = \sqrt{24}$ см

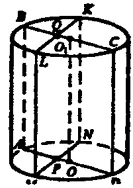
$C > D$, т.к. $\sqrt{24} > \sqrt{20}$

Гипотенуза не помещается внутри сферы, тогда, хотя бы одна вершина лежит вне сферы.



9. Одна сфера всегда будет внутри другой, поэтому общую касательную плоскость провести невозможно

10. Это сфера, у которой данный отрезок является диаметром.

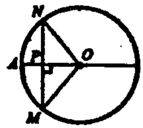


601. $ABCD$ — осевое сечение цилиндра; $OA = r$; точка P — середина радиуса OA; плоскость $MNKL \perp OA$.

Осевое сечение $ABCD$ и сечение $MNKL$ являются прямоугольниками. Пусть образующая цилиндра $LM = \ell$, следовательно, $S = S_{ABCD} = AD \cdot LM = 2rl$.

Выразим длину отрезка MN.

$$ON = OM = r, \quad OP = \frac{r}{2}.$$



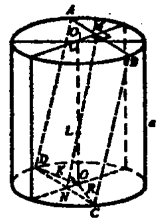
Из прямоугольного треугольника ONP найдем:

$$PN = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{r\sqrt{3}}{2}.$$

$\Delta OPN = \Delta OPM$, следовательно, $NP = PM$, $NM = 2PN = 2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$.

$$S_{MNKL} = MN \cdot LM = r\sqrt{3}l = rl\sqrt{3}.$$

Итак, $S = 2rl$, отсюда $rl = \frac{S}{2}$. Поэтому $S_{MNKL} = \frac{S}{2}\sqrt{3}$.

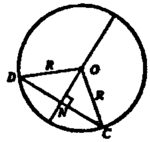


602. $ABCD$ — прямоугольник.

Через центры оснований проведем диаметры, перпендикулярные к сторонам AB и DC. $O_1M \perp AB$, $ON \perp DC$.

Из планиметрии известно, что диаметр, перпендикулярный к хорде, делит хорду пополам, следовательно, точка N и точка M — середины DC и AB соответственно.

Отрезок MN параллелен сторонам AD и BC, $\angle MNO = 60°$ — угол между прямой BC (или ей параллельной MN) и плоскостью основания.



Пусть R — радиус основания цилиндра.

$DC = AB = x$; $DN = \frac{x}{2}$. Из ΔDNO получим:

$$ON = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}$$

Из прямоугольного треугольника LON:

$$\frac{LO}{ON} = tg60° = \sqrt{3}, \quad OL = \sqrt{3} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}}.$$

Рассмотрим плоскость верхнего основания

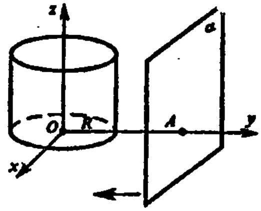
$O_1M = \sqrt{O_1B^2 - BM^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$; следовательно, $O_1M = ON$

Значит $\Delta O_1LM = \Delta OLN$, отсюда $OL = O_1L$.

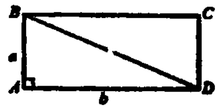
$O_1L + LO = O_1O = x$ (высота цилиндра равна его образующей).

$$2\sqrt{3}\cdot\sqrt{R^2-\frac{x^2}{4}}=x,\quad 4\cdot 3(R^2-\frac{x^2}{4})=x^2,\quad 12R^2-3x^2=x^2,\quad 12R = ..$$

$$R^2=\frac{x^2}{3},\quad R=\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{x\sqrt{3}}{3}.$$



603. Возьмем систему координат, как показано на рисунке. Ось ординат при этом перпендикулярна плоскости α, по оси аппликат направлена ось цилиндра. Будем приближать плоскость α к оси O_z параллельно плоскости O_{xz}. Когда расстояние станет равно R, то допустим, что через точку A можно провести две прямые, параллельные оси O_z (или, что то же самое, перпендикулярные плоскости O_{xy}). Но по теореме п. 4 через точку A может проходить только одна прямая, параллельная оси цилиндра. Следовательно, на поверхности цилиндра найдется только одна прямая, лежащая в плоскости α и параллельная оси цилиндра, она и есть образующая цилиндра.



604. Если вращать прямоугольник $ABCD$ вокруг стороны AB, получим цилиндр, у которого $r = b$, $l = a$

$S_{полн} = 2\pi ab + 2\pi b^2 = S_1$

При вращении вокруг стороны AD получим цилиндр, у которого $r = a$, $l = b$.

$S_{бок} = 2\pi rl = 2\pi ab,\quad S_{осн} = \pi a^2,$

$2S_{осн} = 2\pi a^2,\quad S_{полн} = 2\pi ab + 2\pi a^2 = S_2.$

Согласно условию получили систему уравнений:

$$\begin{cases}2\pi ab+2\pi b^2=S_1,\\ 2\pi ab+2\pi a^2=S_2,\end{cases}\quad \begin{cases}2\pi b(a+b)=S_1,\\ 2\pi a(b+a)=S_2.\end{cases}$$

$\frac{b}{a}=\frac{S_1}{S_2}$. Подставим в первое уравнение системы:

$$2\pi\cdot a\cdot a\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}+2\pi\cdot a^2\cdot\frac{S_1}{S_2}=S_1,\quad 2\pi\cdot a^2(\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_1^2}{S_2^2})=S_1;$$

$$a^2=\frac{S_1}{2\pi\cdot\frac{S_1S_2+S_1^2}{S_2^2}}=\frac{S_1S_2^2}{2\pi\cdot S_1(S_2+S_1)}=\frac{S_2^2}{2\pi(S_2+S_1)},$$

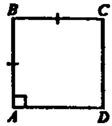
$$b^2=a^2\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{S_2^2}{2\pi(S_1+S_2)}\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{S_1^2}{2\pi(S_1+S_2)}.$$

Диагональ BD вычислим из ΔABD.

$$BD=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{S_2^2}{2\pi(S_1+S_2)}+\frac{S_1^2}{2\pi(S_1+S_2)}}=\sqrt{\frac{S_2^2+S_1^2}{2\pi(S_1+S_2)}};BD=AC.$$

605. а) $ABCD$ — квадрат, сторона которого равна a. Следовательно, радиус основания $r=\frac{a}{2}$, высота цилиндра равна a.

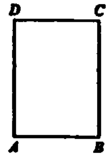
Осевое сечение цилиндра



$$S_{бок}=2\pi\cdot\frac{a}{2}\cdot a=\pi a^2,\ S_{осн}=\pi r^2=\pi\frac{a^2}{4},\ 2S_{осн}=\pi\frac{a^2}{2},$$

$$S_{полн}=\pi a^2+\pi\frac{a^2}{2}=\frac{3\pi a^2}{2},\quad \frac{S_{полн}}{S_{бок}}=\frac{\frac{3}{2}\pi a^2}{\pi a^2}=\frac{3}{2}.$$

Осевое сечение



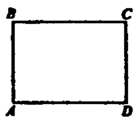
б) Пусть $AB=a$, следовательно, $AD=2a$. Рассмотрим два случая.

Первый: $AD=h,\ \ AB=2r$, следовательно $r=\frac{a}{2}$.

$$S_{бок}=2\pi\cdot\frac{a}{2}\cdot 2a=2\pi a^2,\ S_{осн}=\pi r^2=\pi\frac{a^2}{4},\ 2S_{осн}=\frac{\pi a^2}{2},$$

$$S_{полн}=S_{бок}+2S_{осн}=2\pi a^2+\frac{\pi a^2}{2}=\frac{5}{2}\cdot\pi a^2,\quad \frac{S_{полн}}{S_{бок}}=\frac{\frac{5}{2}\pi a^2}{2\pi a^2}=\frac{5}{4}.$$

Второй: $2AB=AD.\ AB=h,\ AD=2r,\ r=a.$



$S_{бок}=2\pi rh=2\pi\cdot a\cdot a=2\pi a^2,\ S_{осн}=\pi r^2=\pi\cdot a^2,$

$2S_{осн}=2\pi\cdot a^2,\ S_{полн}=S_{осн}+2S_{осн}=2\pi a^2+2\pi a^2=4\pi a^2.$

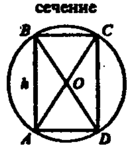
$$\frac{S_{полн}}{S_{бок}}=\frac{4\pi a^2}{2\pi a^2}=2.$$

606. $ABCD$ — прямоугольник, $AB=h,\ \ AD=2r$. Примем $AD=x$, следовательно $r=\frac{x}{2}$. $S_{бок}=2\pi rh=2\pi\frac{x}{2}h=\pi xh.$

Площадь описанного около осевого сечения круга равна $\pi\cdot AO^2=\pi(\frac{1}{2}AC)^2=\frac{\pi}{4}\cdot AC^2.$

Из ΔACD найдем: $AC^2=h^2+x^2$.

ABCD — осевое сечение



Площадь круга $S_{кр}=\frac{\pi}{4}(h^2+x^2).$

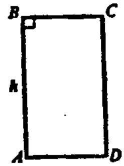
По условию $S_{бок}=S_{кр}$, или $\pi xh=\frac{\pi}{4}(h^2+x^2).$

Требуется найти отношение $\frac{r}{h}=\frac{x}{2h}.$

$$4xh = h^2 + x^2,\ \frac{4xh}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} + \frac{x^2}{h^2},\ \left(\frac{x}{h}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{h}\right) + 1 = 0.$$

Обозначим $t = \frac{x}{h}$, следовательно $t^2 - 4t + 1 = 0$, $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$, $t > 0$ — по смыслу задачи, оба корня уравнения удовлетворяют этому условию. Искомое отношение: $\frac{x}{2h} = \frac{t_{1,2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

607. $ABCD$ — осевое сечение; это — прямоугольник.



Примем $AB = h$, $AD = 2R$.

$S_{бок} = 2\pi Rh$; периметр равен $2(2R + h)$.

Из условий $2p = 2(h + 2R)$, $p = h + 2R$, $h = p - 2R$.

$S_{бок} = 2\pi R(p - 2R) = 2\pi pR - 4\pi R^2$.

Примем $f(R) = -4\pi R^2 + 2\pi Rp$; $R > 0$.

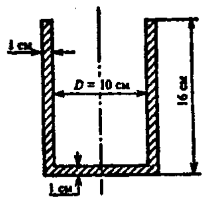
Найдем ее наибольшее значение. Это экстремум функции $f(R)$.

$f'(R) = -8\pi R + 2\pi p = 0 \qquad R = p/4$

$$f\left(\frac{p}{4}\right) = -4\pi\left(\frac{p}{4}\right)^2 + 2\pi\frac{p^2}{4} = \frac{-4\pi p^2}{16} + \frac{8\pi p^2}{16} = \frac{4\pi p^2}{16} = \frac{\pi p^2}{4}$$

Наибольшая площадь боковой поверхности достигается при радиусе основания цилиндра $R = \frac{p}{4}$. $h = p - 2R = p - \frac{2p}{4} = \frac{p}{2}$.

608. Если внутренний радиус равен 5 см, то внутренний диаметр D = 10 см. Следовательно, внешний диаметр, учитывая толщину стенок, равен $D + 2 = 12$ (см).



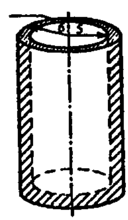
Осевое сечение стакана

$S_{осн} = \pi\frac{12^2}{4} = 36\pi$ (см^2)

($S_{круга} = \pi\frac{d^2}{4}$, где d — диаметр круга).

Высота стакана 16 см, поэтому

$S_{бок} = 2\pi \cdot \frac{12}{2} \cdot 16 = 192\pi$ (см^2).



Итак, площадь внешней поверхности стакана

$S_{внеш} = S_{бок} + S_{осн} = 192\pi + 36\pi = 228\pi$ (см^2).

Вычислим полную площадь внутренней поверхности.

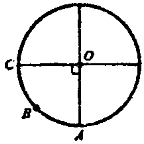
$S_{бок} = \pi \cdot 5^2 = 25$ (см^2). Высота внутренней части $16 - 1 = 15$ (см).

$S_{бок} = 2\pi \cdot 5 \cdot 15 = 150\pi$ (см^2). $S_{полн} = S_{осн} + S_{бок} = 175\pi$ (см^2).

Вычислим площадь кольца: $S_к = \pi(6^2 - 5^2) = \pi(36 - 25) = 11\pi$ (см^2).

Площадь полной поверхности стакана равна $228\pi + 175\pi + 11\pi = 414\pi$ (см^2).

609. Найдем длину дуги CBA. Если примем за R радиус окружности, то это будет четверть длины круга, т.е. $(2\pi R)/4$ или $\frac{\pi R}{2}$. Но с другой стороны, когда уже сложен конус, дуга CBA становится окружностью, основанием конуса. Тогда, учитывая, что r — это радиус основания,

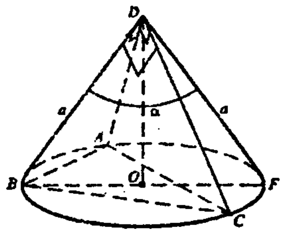


мы получим, что длина ее будет $2\pi r$. Но это одна и та же дуга, следовательно, $2\pi r = \frac{\pi R}{2}$ или $r = \frac{R}{4}$, что и требовалось доказать, т.к. R — это также образующая этого конуса.

610. Образующие конуса равны. Пусть $DA = DB = DC = a$.

Прямоугольные треугольники DBC, DAB и DAC равны по двум катетам.

$AB = AC = BC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.



Найдем R по формуле $\frac{a\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} = 2R$

(теорема синусов для ΔABC)

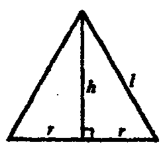
$$R = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2} = a\sqrt{\frac{2}{3}},\ BF = 2\sqrt{\frac{2}{3}}a.$$

Примем $\angle BDF = \alpha$, тогда из теоремы косинусов для ΔBDF имеем:

$$\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}a\right)^2 = a^2 + a^2 - 2\cdot a\cdot a\cdot\cos\alpha,\ 4\frac{2}{3} = 1 + 1 - 2\cos\alpha,$$

$$\frac{2}{3} = -2\cos\alpha,\ \cos\alpha = -\frac{1}{3}$$

611. Пусть r — радиус основания конуса, h — высота конуса, тогда по условию $S_1 = \pi r^2$ и $S_0 = \pi rl$; l — образующая конуса.



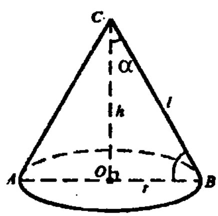
$l = \sqrt{h^2 + r^2}$, $S_0 = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$,

$S_1 = \pi r^2$ $\qquad S_0^2 = \pi^2 r^2 \qquad (h^2 + r^2) = \pi^2 r^2 h^2 + \pi^2 r^4$,

$S_1^2 = \pi^2 r^4 \qquad S_0^2 = \pi^2 r^2 h^2 + S_1^2$

$$r^2h^2 = \frac{S_0^2 - S_1^2}{\pi^2},\ rh = \sqrt{\frac{S_0^2 - S_1^2}{\pi^2}} = \frac{\sqrt{S_0^2 - S_1^2}}{\pi}$$ — это и есть площадь осевого сечения.

612. Примем $CO = h$, $OB = r$, $l = \sqrt{h^2 + r^2}$



$S_{бок} = \pi rl = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$, $S_{полн} = \pi r^2 + S_{бок} = \pi r^2 + \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$. По условию $\frac{S_{бок}}{S_{полн}} = \frac{7}{8}$,

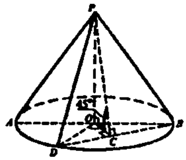
$$\frac{\pi r\sqrt{h^2 + r^2}}{\pi r^2 + \pi r\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{7}{8};$$

$8\sqrt{h^2+r^2}=7r+7\sqrt{h^2+r^2}$, $\sqrt{h^2+r^2}=7r$, $h^2+r^2=49r^2$, $h^2=48r^2$, $\frac{h^2}{r^2}=48$

$\frac{h}{r}=\operatorname{tg}\alpha$, $\frac{h^2}{r^2}=\operatorname{tg}^2\alpha$ $\quad 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\quad 49=\frac{1}{\cos^2\alpha}$,

$\cos\alpha=\frac{1}{7}$, или $\cos\alpha=-\frac{1}{7}$. Так как ΔABC равнобедренный, то α — это острый угол, $\cos\alpha>0$. $\alpha=\arccos\frac{1}{7}$.

613. Построим $OC\perp DB$ и отрезок PC. По теореме о трех перпендикулярах $PC\perp DB$, PC — высота ΔDPB. Запишем теорему синусов для равнобедренного ΔDPB.



$$\frac{DB}{\sin 120^\circ}=\frac{4}{\sin 30^\circ},\ \sin 120^\circ=\sin 60^\circ$$

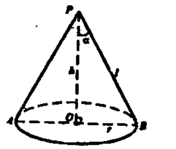
$$DB=\frac{4\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}=4\cdot 2\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}\ (\text{см}),$$

$$DC=\frac{1}{2}\,DB=2\sqrt{3}\ (\text{см}),\ OC=\sqrt{DO^2-DC^2}=\sqrt{16-12}=2\ (\text{см})$$

$\angle PCO=45^\circ$. Из ΔPOC: $PC=\frac{OC}{\cos 45^\circ}=2\sqrt{2}$ (см).

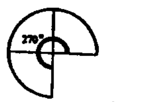
$$S_{\Delta DBP}=\frac{1}{2}\cdot DB\cdot PC=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}=4\sqrt{6}\ (\text{см}^2)$$

614. По формуле $\alpha=\frac{360^\circ\cdot r}{\ell}$



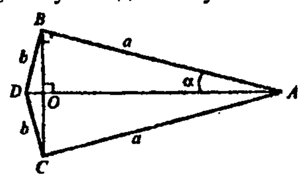
$$\frac{r}{\ell}=\frac{\alpha}{360^\circ}=\frac{270^\circ}{360^\circ}=\frac{3}{4}.$$

Из прямоугольного треугольника POB:



$\frac{r}{\ell}=\sin\alpha$. $\sin\alpha=\frac{3}{4}$, $\alpha=\arcsin\frac{3}{4}$ (так как α — острый угол).

615. Если вращать ΔABD вокруг гипотенузы, получим два конуса с общим основанием.



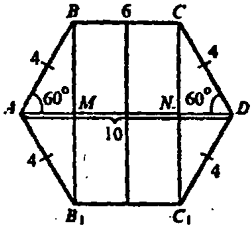
$S_{бок}=\pi r l$, Из ΔABD: DA: $\sqrt{a^2+b^2}$,

$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

Боковая поверхность конуса с образующей a: $S_{бок}=\pi\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot a$

Боковая поверхность конуса с образующей b: $S_{бок}=\pi\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot b$

Поверхность тела имеет площадь: $\dfrac{\pi a^2 b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\dfrac{\pi a b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$



616. При вращении трапеции ABD вокруг стороны AD, получится тело вращения, состоящее из трех частей: центральной — прямого кругового цилиндра с радиусом BM и высотой BC и двух одинаковых конусов (трапеция равнобедренная по условию).

$AM = ND = \dfrac{10-6}{2} = 2$ (см).

$AB = \dfrac{AM}{\cos 60^\circ} = 2\cdot 2 = 4$ (см). $BM = \sqrt{4^2-2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (см).

Найдем боковую поверхность цилиндра:

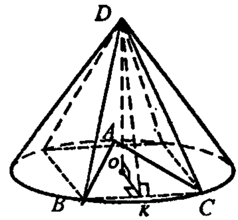
$S_{бок} = 2\pi rl = 2\pi\cdot BM\cdot BC = 2\pi\cdot 2\sqrt{3}\cdot 6 = 24\sqrt{3}\pi$ (см²).

Боковая поверхность одного конуса:

$S_{бок} = \pi rl = \pi\cdot BM\cdot AB = \pi\, 2\sqrt{3}\cdot 4 = 8\sqrt{3}\pi$ (см²).

Боковая поверхность всего тела вращения:

$S = 24\sqrt{3}\pi + 2\times 8\sqrt{3}\pi = 24\sqrt{3}\pi + 16\sqrt{3}\pi = 40\sqrt{3}\pi$ (см²).



617. а). Построим $OK \perp BC$, отрезок DK. По теореме о трех перпендикулярах $DK \perp BC$. В правильном ΔABC, OK — радиус вписанной в ΔABC окружности. Примем $OK = r$.

$r = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p}$, где p — полупериметр ΔABC.

Из равенства $\dfrac{a}{\sin 60^\circ} = 2R$ (теорема синусов для ΔABC) найдем a — сторону ΔABC.

$a = 2R\sin 60^\circ = 2\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (см).

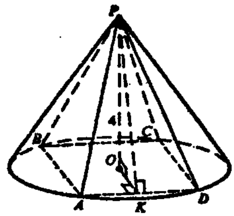
$S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $p = \dfrac{3a}{2}$; $r = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cdot\frac{3a}{2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$ (см). $r = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3}{2}$ (см).

Из прямоугольного ΔDOK: $DK = \sqrt{DO^2+OK^2} = \sqrt{16+\dfrac{9}{4}} = \dfrac{\sqrt{73}}{2}$.

$S_{\Delta BCD} = \dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot DK = \dfrac{1}{2}a\cdot DK = \dfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{73}}{2} = \dfrac{3}{4}\sqrt{219}$ (см²).

$S_{бок} = 3S_{\Delta BCD} = \dfrac{9}{4}\sqrt{219}$ (см²); $S_{\Delta ABC} = \dfrac{(3\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$;

$S_{полн} = S_{бок} + S_{\Delta ABC} = \dfrac{27\sqrt{3}}{4} + \dfrac{9}{4}\sqrt{219} = \dfrac{27\sqrt{3}}{4} + \dfrac{9\sqrt{3}\cdot\sqrt{73}}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}\times\left(3+\sqrt{73}\right)$ (см²);



б) Построим $OK \perp AD$, отрезок PK. По теореме о трех перпендикулярах $PK \perp AD$.

В квадрате диагональ $BD = 2R$, R — радиус описанной окружности около квадрата, $BD = 2 \cdot 3$. Примем сторона квадрата равна a см, следовательно

$$a\sqrt{2} = BD, a\sqrt{2} = 6, a = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \text{ (см)};$$

$$OK = \frac{a}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Из прямоугольного ΔPOK:

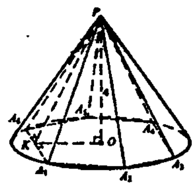
$$PK = \sqrt{PO^2 + OK^2} = \sqrt{16 + \frac{9}{4} \cdot 2} = \sqrt{16 + \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{32+9}{2}} = \sqrt{\frac{41}{2}}$$

$$S_{\Delta APD} = \frac{1}{2} \quad AD \cdot PK = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{41}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{41} \text{ (см}^2\text{)};$$

$S_{бок} = 4 \cdot S_{\Delta APD} = 4 \cdot \dfrac{3\sqrt{41}}{2} = 6\sqrt{41}$ (см^2); (боковые грани являются равнобедренными треугольниками);

$$S_{\Delta ABCD} = a^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 18 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{\Delta ABCD} = 6(\sqrt{41} + 3) \text{ (см}^2\text{)};$$



в) PO — высота конуса. Построим $OK \perp A_1A_6$, отрезок PK. По теореме о трех перпендикулярах $PK \perp A_1A_6$.

$A_1A_2..A_6$ — правильный 6 — угольник. Сторона правильного 6-тиугольника равна радиусу описанной окружности. $a_6 = R$, $A_1A_6 = a_6 = 3$ (см)

OK — радиус вписанной в правильный 6-угольник окружности.

По теореме из планиметрии, $OK = r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (см)

Из прямоугольного ΔPOK:

$$PK = \sqrt{PO^2 + OK^2} = \sqrt{16 + \frac{9}{4} \cdot 2} = \sqrt{\frac{64+27}{4}} = \sqrt{\frac{91}{4}} = \frac{\sqrt{91}}{2} \text{ (см)}$$

$$S\ \Delta A_1PA_6 = \frac{1}{2} \quad A_1A_6 \cdot PK = \frac{1}{2} \cdot 3\ \frac{\sqrt{91}}{2} = \frac{3}{4}\sqrt{91} \text{ (см}^2\text{)};$$

Все боковые грани — равные равнобедренные треугольники, поэтому

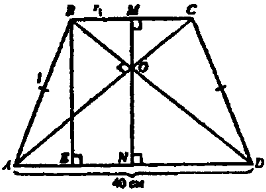
$$S_{бок} = 6S_{\Delta A_1OA_6} = 6 \cdot \frac{3\sqrt{91}}{4} = \frac{9 \cdot \sqrt{91}}{2} \text{ (см}^2\text{)}; S_{осн} = 6S_{\Delta A_1OA_6},$$

A_1OA_6 — равносторонний, поэтому

$$S_{\Delta A_1OA_6} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ (см}^2\text{)}; S_{полн} = \frac{9}{2}\left(\sqrt{91} + 6\sqrt{3}\right) \text{ (см}^2\text{)}$$

618. $S_{бок} = \pi\,(r + r_1)l$, где $r = \dfrac{1}{2}\,AD = 20$ (см),

. $= AB,\ r_1 = \dfrac{1}{2}\,BC = BM.$



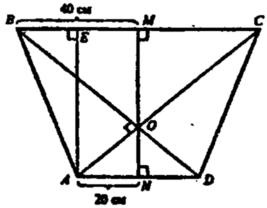
По теореме из планиметрии известно, что если в равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то высота трапеции равна средней линии.

$S_{ABCD} = 36 = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot MN$

Но $\dfrac{BC + AD}{2}$ = средней линии = MN,

где MN — высота трапеции.

Следовательно, $36 = (MN)^2$. MN — высота трапеции. 6 (дм) = 60 (см)



$60 = \dfrac{BC + AD}{2}$, $60 = \dfrac{2r_1 + 40}{2}$ $\quad 120 = 2r_1 + 40.$

$2r_1 = 80$, $r_1 = 40$ (см) $BC = 2 \cdot 40 = 80$ (см)

Изменим рисунок.

Построим $AE \perp BC$.

$:E = 40 - 20 = 20$ (см), $AE = MN = 60$ (см)

Из прямоугольного ΔABE

$BA = \sqrt{BE^2 + AE^2} = \sqrt{20^2 + 60^2} = \sqrt{4000} = 20\sqrt{10}$ (см)

$S_{бок} = \pi\,(40 + 20) \cdot 20\sqrt{10} = 1200\sqrt{10}\pi$ (см^2)

Площадь верхнего основания равна: $\pi r_1^{\,2} = \pi 40^2 = 1600\pi$ (см^2) $= 16\pi$ (дм^2), а площадь нижнего основания равна $\pi 20^2 = 400\pi$ (см^2) $= 4\pi$ (дм^2).

$S_{полн} = 12\sqrt{10} + 16\pi + 4\pi = 12\sqrt{10} + 20\pi$ (дм)^2

619. Докажите, что: а) центр сферы является центром симметрии сферы, б) любая прямая, проходящая через центр сферы, является осью симметрии сферы; в) любая плоскость, проходящая через центр сферы, является плоскостью симметрии сферы.

а) Проведем произвольную прямую через центр сферы. Прямая пересечет сферу в точках A и B. Отрезок AB будет диаметром, ½ AB — радиус сферы Расстояние от каждой из точек до центра сферы равно, значит, центр сферы будет центром симметрии двух данных точек. Т.к. прямая проводилась произвольно, то утверждение справедливо для любых двух точек, являющихся концами диаметра сферы.

б) Построим произвольную прямую а, которая проходит через центр сферы O. Докажем, что она является осью симметрии. Возьмем произвольную точку A на сфере. Построим точку симметричную ей относительно O Для этого проведем $AK \perp a$ и продолжим за точку R на расстояние AK Получим точку A_1. (по 2-м катетам) OA, $OA = R$. Но сфера — геометрическое место точек удаленное от т. O на расстояние R. Значит A_1 лежит на сфере

Значит, при симметрии произвольная точка сферы переходит в точку этой же сферы. Тогда прямая a — любая прямая, проходящая через центр сферы, является осью симметрии сферы.

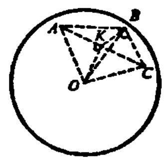
в) Возьмем произвольную плоскость α, которая проходит через центр сферы. Докажем, что для любой точки A симметричная ей относительно α точка A, также лежит на сфере.

Действительно, при построении симметричной точки мы проведем отрезок $AK\alpha$ ($K\alpha$) и продолжаем его за точку K так, чтобы $AK = KA_1$. $\Delta AKO = \Delta A_1KO$ ($OK = OK$, $AK = A_1K$ — по двум катетам). $\Delta A_1O = AO < R$, т.е. A_1, удалена от точки O на расстояние R. Следовательно, что A_1, лежит на сфере. Следовательно, для любой точки A симметричная ей точка также лежит на сфере, а значит α — плоскость симметрии.

620. а) Вычислим длину гипотенузы прямоугольного треугольника:

$\sqrt{1,8^2+2,4^2} = \sqrt{3,24+5,76} = \sqrt{9} = 3$ (см). Диаметр сферы равен $2 \cdot 1,5 = 3$ (см).

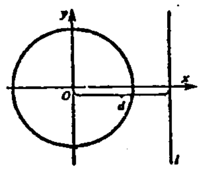
Вывод: диаметр сферы равен длине гипотенузы, следовательно, центр сферы находится на середине гипотенузы, и лежит в плоскости треугольника.



б) Плоскость ΔABC пересекает сферу по окружности. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы. Проведем из точки O отрезок $OK \perp$ плоскости ΔABC, отрезки KA, KB, KC. Равные наклонные (радиусы OA, OB, OC) имеют равные проекции на плоскость ABC, тогда, $KA = KB = KC$, точка K равноудалена от вершин ΔABC, значит, она — центр описанной окружности. Таким образом, точка K — середина гипотенузы AC, OK — искомое расстояние.

$AC = 3$ см, $AK = 1,5$ см. Из ΔABC по теореме Пифагора

$OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{6,5^2 - 1,5^2} = \sqrt{42,25 - 2,25} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$



621 (с)[1]. Очевидно, что из точки O всегда можно провести прямую (отрезок), перпендикулярную l. Введем систему координат, как показано на рисунке.

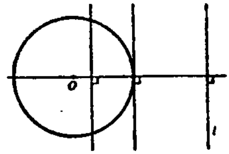
Уравнение окружности: $x^2 + y^2 = R^2$.

Уравнение прямой l: $x = d$

Исследуем систему: $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x = d \end{cases}$

$y^2 = R^2 - d^2 = (R+d)(R-d)$,

$y = \pm\sqrt{(R+d)(R-d)}$ ($R + d > 0$ всегда).

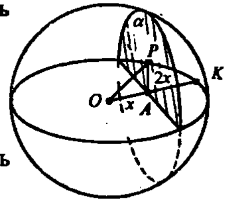


а) Если $R - d > 0$, $R = d$ и $y = 0$ — касание в точке (d, 0) с окружностью, а значит, со сферой.

б) Если $R - d < 0$, то решений нет, значит, l не пересекается с окружностью; l не пересекается со сферой.

[1] Обозначение (с) соответствует задаче из учебника до 2006 года издания, (н) — учебника после 2006 года издания.

621 (н). а) Пусть $OX = X$, тогда $AK = 2x$ (по условию).



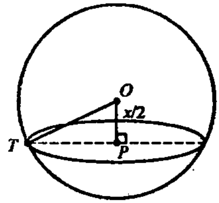
Опустим из точки O перпендикуляр на плоскость $\alpha OP \perp \alpha$, по условию $OP = \frac{1}{6}OK = \frac{1}{6} - 3x = \frac{x}{2}$.

ΔOPA – прямоугольный, т.к. $OP \perp \alpha$.

$\sin\angle OAP = \frac{OP}{OA} = \frac{x}{2-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle OAP = 30°$ – это и есть угол между OA и плоскостью α

б) $OP = \frac{x}{2}$, $OT = 3x$ (т.к. радиус сферы равен $3x$).

$TP^2 = OT^2 - OP^2 =$ (теорема Пифагора) $= 9x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{35x^2}{4}$



$TP = \frac{\sqrt{35}}{2}x$

$S_1 = \pi(TP)^2 = \frac{35\pi x^2}{4}$ (Площадь сечения α).

$S_2 = 4\pi(3x)^2 = 36\pi x^2$ – площадь поверхности данной сферы.

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{35}{4 \cdot 36} = \frac{35}{144}$.

Ответ: $\frac{35}{144}$

622. Найдите координаты точки пересечения сферы, заданной уравнением $(x-3)^2 + y^2 + (z+5)^2 = 25$, с осями координат. Если точка пересечения на оси абсцисс, ее координаты имеют вид $(x; 0; 0)$. Вычислим x.

$(x-3)^2 + 0^2 + 5^2 = 25$; $(x-3)^2 = 0$, $x = 3$. Координаты точки $(3; 0; 0)$.

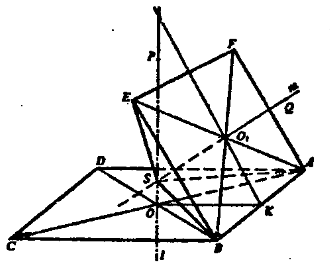
Если точка пересечения на оси ординат, то ее координаты имеют вид $(0; y; 0)$. Вычислим y. $(0-3)^2 + y^2 + (0+5)^2 = 25$. $9 + y^2 + 25 = 25$, $y^2 + 9 = 0$, уравнение не имеет решений, значит, сфера не имеет общих точек с осью ординат. Если есть точка пересечения с осью аппликат, то эта точка имеет координаты $(0; 0; z)$. $(0-3)^2 + 0^2 + (z+5)^2 = 25$, $(z+5)^2 = 25 - 9 = 16$, $z + 5 = 4$, или $z + 5 = -4$, $z_1 = -1$, или $z_2 = -9$. Сфера пересекает эту ось в двух точках с координатами $(0; 0; -1)$ и $(0; 0; -9)$.

623. Найдите радиус сечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ плоскостью, проходящей через точку $M(2; 4, 5)$ и перпендикулярной к оси абсцисс.

Т.к. плоскость проходит через точку $M(2; 4; 5)$ перпендикулярно оси абсцисс, то все точки этой плоскости имеют координаты вида $(2; y; z)$, если они удовлетворяют уравнению $x^2+y^2+z^2 = 36$, то будут лежать на сфере

$2^2 + y^2 + z^2 = 36$, $y^2 + z^2 = 32$. В плоскости, перпендикулярной оси абсцисс, это уравнение окружности с радиусом $r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Следовательно, плоскость пересекает сферу по окружности с радиусом $4\sqrt{2}$.

624. Через точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$ проведем прямую l, l перпендикулярна плоскости $ABCD$. Все точки на прямой l равноудалены от вершин A, B, C, D. (Если наклонные, проведенные из одной точки, имеют равные проекции, то сами наклонные равны $PA = PB = PC = PD$, $P \in l$.)



Построим отрезок $OK \perp AB$, через точку O_1 проведем луч KO_1. $AB \perp$ плоскости POK.

Прямая AB лежит в плоскости прямоугольника $ABEF$ AB, значит плоскости POK и $ABEF$ взаимно перпендикулярны. Проведем через точку O_1 прямую $m \perp$ плоскости $ABEF$.

Если две плоскости перпендикулярны и к одной из них проведен перпендикуляр, который имеет общую точку с другой плоскостью, то этот перпендикуляр принадлежит в этой плоскости.

Таким образом, $m \subset$ плоскости POK; m геометрическое место точек, равноудаленных от вершин прямоугольника $ABEF$: $QA = QB = QE = QF$ $Q \in m$. Прямые l и m пересекаются в точка S, которая равноудалена как от вершин прямоугольник $ABCD$, так и от вершин прямоугольника $ABEF$.

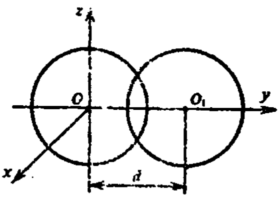
Докажем, что точка S равноудалена от вершин A, B, C, D и вершин E, F Проведем отрезки SA, SE, SB.

$\Delta SAO_1 = \Delta SOB$ (они прямоугольные, SO — общий катет, $OA = OB$ по свойству диагоналей прямоугольника).

Отсюда $SA = SB$. Значит, $SA = SB = SE$

Доказано, что $SA = SB = SE = SC = SD$ и $SA = SB = SE = SF$, следовательно, точка S равноудалена от всех вершин, значит, она является центром сферы, проходящей через все данные вершины.

625. Введем систему координат, согласно рисунку. Уравнение сферы с центром в точке O: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.



Уравнение сферы с центром в точке O_1.
$x^2 + (y - d)^2 + z^2 = R^2$.

Решение системы:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x^2 + (y-d)^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$$

дает ответ на вопрос задачи.

$$x^2 + y^2 + z^2 - x^2 - (y^2 - 2dy + d^2) - z^2 = 0.\ 2dy - d^2 = 0,\ d > 0, \Rightarrow 2y = d,\ \frac{1}{2}d = y$$

Согласно условию задачи $d < 2R$, тогда, $\frac{d}{2} < R, y < R$.

Значит, есть некоторая плоскость, которая перпендикулярна оси ординат (а значит, параллельная плоскости O_{xz}) и пересекает сферу, а при пересечении сферы плоскостью в сечении получим окружность. Утверждение а) доказано.

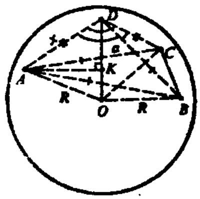
Подставим значение $y = \dfrac{d}{2}$ в уравнение сферы $x^2 + \dfrac{d^2}{4} + z^2 = R^2$.

$$x^2 + z^2 = R^2 - \frac{d^2}{4}$$

Если $d = 1{,}6R$, то $x^2 + z^2 = R^2 - \dfrac{2{,}56\,R^2}{4} = R^2(1 - 0{,}64) = 0{,}36R^2$

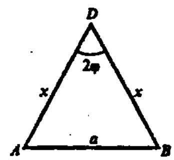
Это уравнение окружности в плоскости, параллельной плоскости O_{xz}, ее радиус $r = \sqrt{0{,}36R^2} = 0{,}6R$.

626. а) Построим $DK \perp$ плоскости ABC, проведем отрезки KB, KC. (Чтобы не загромождать рисунок, показан только KA).



$\Delta DKA = \Delta DKB = \Delta DKC$ (по катету и гипотенузе). Следовательно, $KA = KB = KC = r$, r — радиус окружности, описанной около ΔABC. Построим отрезок $OT \perp$ плоскости ABC и отрезки TA, TB, TC.

$\Delta OTA = \Delta OTB = \Delta OTC$ (они прямоугольные, OT — общий катет, $OA = OB = OC = R$, R — радиус сферы). тогда, $TA = TB = TC = r$, r — радиус окружности, описанной около ΔABC. Выше доказано, что $KA = KB = KC = r$. Значит, точки T и K совпадают и отрезок $OD \perp$ плоскости ABC.



$\Delta ADC = \Delta BDC = \Delta ADB$ (по двум сторонам и углу между ними), следовательно, $AB = CB = AC$, ΔABC — равносторонний.

Пусть $AD = x$, $AB = a$. $\angle A = \angle B = \dfrac{180^\circ - 2\varphi}{2} = 90^\circ - \varphi$

Согласно теоремы синусов:

$$\frac{a}{\sin 2\varphi} = \frac{x}{\sin(90^\circ - \varphi)},\quad \frac{a}{2\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{x}{\cos\varphi},\quad a = 2\sin\varphi x$$

Пусть $KA = KB = KC = r$. По теореме синусов для ΔABC.

$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2r, a = 2r\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}r \quad 2\sin\varphi x = \sqrt{3}r,\ r = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}}x$$

В ΔADK $DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{x^2 - r^2}$

В ΔAOK $OK = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{R^2 - r^2}$

$$DK + KO = R,\ \sqrt{x^2 - r^2} + \sqrt{R^2 - r^2} = R,\ \left(\sqrt{x^2 - r^2} + \sqrt{R^2 - r^2}\right)^2 = R^2$$

$$x^2 - r^2 + R^2 - r^2 + 2\sqrt{(x^2 + r^2)(R^2 - r^2)} = R^2$$

$$2\sqrt{(x^2 - r^2)(R^2 - r^2)} = 2r^2 - x^2,\ 4(x^2 - r^2)(R^2 - r^2) = 4r^4 + x^4 - 4r^2x^2,$$

$$4x^2R^2 - 4x^2r^2 - 4r^2R^2 + 4r^4 = 4r^4 + x^4 - 4r^2x^2.$$

$x^4 - 4x^2R^2 + 4r^2R^2 = 0, x^4 - 4x^2R^2 + 4R^2\dfrac{4}{3}\sin^2\varphi x^2 = 0,$

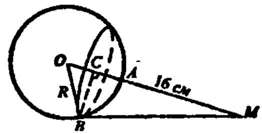
$x^2(x^2 - 4R^2 + \dfrac{16R^2}{3}\sin^2\varphi) = 0$, $x \neq 0$, тогда, $x^2 = 4R^2 - 4R^2\dfrac{4}{3}\sin^2\varphi$.

$x = DA = \sqrt{4R^2(1 - \frac{4}{3}\sin^2\varphi)} = 2R\sqrt{\dfrac{3 - 4\sin^2\varphi}{3}}$ $AB = a = 4R\sin\varphi\sqrt{\dfrac{3 - 4\sin^2\varphi}{3}}$

б) Сечение сферы плоскостью ΔABC является окружность с радиусом

$r = \dfrac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}}2R\dfrac{\sqrt{3 - 4\sin^2\varphi}}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{3}\sqrt{3 - \sin^2\varphi 4}\sin\varphi R$

Вычислим площадь сечения: $\pi r^2 = \pi\dfrac{16}{9}\sin^2\varphi(3 - 4\sin^2\varphi)R^2$



627. Известно, что ближайшая точка (A), лежащая на сфере к точке (M), лежащей вне сферы, принадлежит отрезку CM, где O — центр сферы. Пусть CB — r — радиус окружности, $AC = x$, $BM = 24$ см. $OA = 10$ см.

Из прямоугольного ΔCBM: $CM^2 + CB^2 = MB^2$, или $(16 + x)^2 + r^2 = 24$ см.

Из прямоугольного ΔCBO: $OB^2 = OC^2 + CB^2$, или $10^2 = (10 - x)^2 + r^2$.

Решим систему $\begin{cases}(16 + x)^2 + r^2 = 576,\\(10 - x)^2 + r^2 = 100.\end{cases}$

$(16 + x)^2 - (10 - x)^2 = 476,$ $\quad 256 + 32x + x^2 - 100 - x^2 + 20x = 476.$

$52x = 576 - 256, 52x = 320, x = \dfrac{320}{52} = \dfrac{80}{13}$ (см);

$r^2 = 100 - (10 - x)^2 = 100 - 100 + 20x - x^2 = 20x - x^2$

$r^2 = \dfrac{20 \cdot 80}{13} - \dfrac{80 \cdot 80}{13 \cdot 13} = 100 \cdot \dfrac{16 \cdot 13 - 64}{169} = \dfrac{10^2 \cdot 12^2}{13^2},$

$r = \sqrt{\dfrac{10^2 \cdot 12^2}{13^2}} = \dfrac{10 \cdot 12}{13} = \dfrac{120}{13}$ (см).

Вычислим длину окружности $L = 2\pi r$, $L = 2\pi\dfrac{120}{13} = \dfrac{240}{13}\pi$ (см)

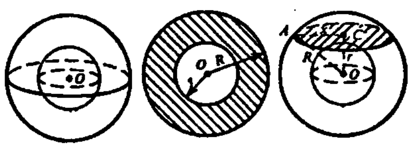
628. Пусть R — радиус внешней сферы; r — радиус внутренней сферы. Сечение тела плоскостью, которая проходит через центры сфер, кольцо. Площадь кольца равна $\pi(R^2 - r^2)$. (1)

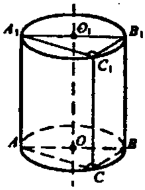
Сечение, плоскостью касательной к внутренней сфере — окружность.

По теореме п. 61 $OC = r$ перпендикулярен к плоскости в сечении. Из прямоугольного ΔACO:

$x = \sqrt{R^2 - r^2}$ $S_{сеч} = \pi x^2 = \pi(R^2 - r^2)$. (2)

Сравнивая выражение (1) и (2) тождественны, убеждаемся в справедливости утверждения задачи.

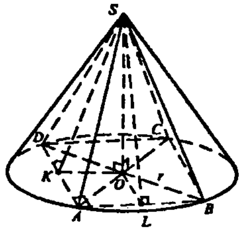




629. AB — диаметр окружности основания $\angle ACB=90°$, т.к. опирается на диаметр.

$BC \perp CC_1$, т.к. CC_1 образующая и перпендикулярна основанию; $BC \perp$ плоскости ACC_1. По признаку перпендикулярности двух плоскостей (п.23) плоскость AA_1C_1C перпендикулярна плоскости BCC_1B_1.

630. SO перпендикулярна ABCD, SO=h=12 см, AB=8см, BC=6см



OA=OB=r. Ребра пирамиды равны образующим конуса и лежат на поверхности конуса.

$BD=2r$, $BD=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$ см

r=5 см

Вычислим площадь полной поверхности конуса.

$S_{осн}=\pi r^2=\pi\cdot 25$ (см^2)

Из прямоугольного ΔSOA

$SA=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$ см

$S_{бок}=\pi rl$, $l=SA$

$S_{бок}=\pi\cdot 5\cdot 13=65\pi$ см^2.

$S_{полн}=S_{осн}+S_{бок}=(25+65)\,\pi=90\pi$ см^2

$S_{ABCD}=AB\cdot BC=6\cdot 8=48$ см^2

Боковые грани попарно равны. Построим $OK_1\perp DA$, $OL\perp AB$, отрезки SK и SL. По теореме о трех перпендикулярах $SK\perp DA$ и $SL\perp AB$

$OK=\frac{1}{2}AB=4$ (см), $OL=\frac{1}{2}BC=3$ см.

Из Δ SOK: $SK=\sqrt{h^2+OK^2}=\sqrt{144+16}=4\sqrt{10}$ см.

$S_{\Delta ASD}=\frac{1}{2}SK\cdot DA=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\sqrt{10}=12\sqrt{10}$ см^2

Из ΔSOL: $SL=\sqrt{h^2+OL^2}=\sqrt{144+9}=\sqrt{153}=3\sqrt{17}$ см.

$S_{\Delta ASB}=\frac{1}{2}\cdot SL\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3\sqrt{17}=12\sqrt{17}$ см^2

$S_{бок}=2\,(S_{\Delta ASD}+S_{\Delta ASB})=2\cdot 12\,(\sqrt{10}+\sqrt{17})=24\,(\sqrt{10}+\sqrt{17})$ см^2

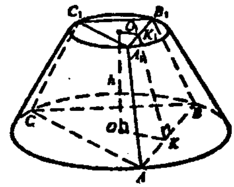
$S_{полн}=S_{бок}+S_{осн}=24\sqrt{10}+24\sqrt{17}+48=24\,(\sqrt{10}+\sqrt{17}+2)$ см^2

$$\frac{S_{пирам}}{S_{кон}}=\frac{24(\sqrt{10}+\sqrt{17}+2)}{90\pi}=\frac{4(\sqrt{10}+\sqrt{17}+2)}{15\pi}$$

631. а) r=2 см, h=4 см, R=5 см.

Обозначим AC=BC=AB=a, тогда $R=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $a=R\sqrt{3}=5\sqrt{3}$ см

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{75\sqrt{3}}{4}$ см ^{2}



Обозначим $A_1C_1=B_1C_1=A_1B_1=b$

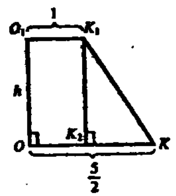
Тогда $r=\dfrac{b}{\sqrt{3}}$, $b=r\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$S_{\Delta A_1B_1C_1}=\dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4\ 3\ \sqrt{3}}{4}=\dfrac{12\ \sqrt{3}}{4}$ см ^{2}

Боковые грани -- равные равнобедренные трапеции Построим $OK_1 \perp A_1B_1$, $OK \perp AB$, отрезок K_1K По теореме о трех перпендикулярах $K_1K \perp AB$.

OK, O_1K_r · радиусы вписанных окружностей в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ соответственно

$OK=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{5}{2}$ см,



$O_1K_1=\dfrac{b}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1$ см.

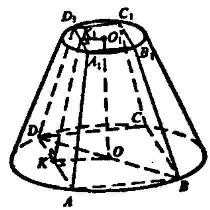
Проведем $K_1K_2 \perp OK$ $K_2K_1=\dfrac{5}{2}-1=\dfrac{3}{2}$ см.

Из ΔK_1K_2K $K_1K=\sqrt{h^2+\dfrac{9}{4}}=\sqrt{16+\dfrac{9}{4}}=\sqrt{\dfrac{73}{4}}=\dfrac{\sqrt{73}}{2}$ см.

$S_{бок}=3\ S_{\Delta ABB_1A_1}=\dfrac{21\sqrt{3}\cdot\sqrt{73}}{4}$ см^2

$S_{полн}=S_{бок}+S_{\Delta A_1B_1C_1}=\dfrac{21\sqrt{3}\ \sqrt{73}}{4}+\dfrac{75\sqrt{3}}{4}+\dfrac{12\sqrt{3}}{4}=\dfrac{21\sqrt{3}\cdot\sqrt{73}}{4}+\dfrac{87\sqrt{3}}{4}=$

$=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}(7\sqrt{73}+29)$ см ^{2}

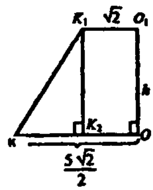


б) Пусть $AB=a$, тогда $R=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$,

$a=R\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ см, $S_{ABCD}=a^2=50$

Обозначим $A_1B_1=b$, тогда $V=\dfrac{b}{\sqrt{2}}$

$b=r\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ см $\qquad S_{\Delta A_1B_1C_1D_1}=b^2=8$ см ^{2}



Боковые грани — равные равнобедренные трапеции. Построим $O_1K_1 \perp D_1A_1$, $OK \perp DA$, отрезок K_1K. По теореме о трех перпендикулярах $K_1K \perp AD$.

$O_1K_1=\dfrac{b}{2}=\sqrt{2}$ см; $\qquad OK=\dfrac{a}{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$,

$$KK_2 = \frac{5}{2}\sqrt{2} - \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ см}$$

Из $\Delta K_1 K_2 K$.

$$K_1K = \sqrt{h^2 + K_2K^2} = \sqrt{16 + \frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{82}{4}} = \frac{\sqrt{82}}{2} \text{ см.}$$

$$S_{\Delta AA_1D_1D} = \frac{A_1D_1 + AD}{2} \cdot K_1K = \frac{a+b}{2} \cdot K_1K = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{82}}{2} = \frac{7\sqrt{2} \cdot \sqrt{82}}{4} \text{ см}$$

$$S_{бок} = 4 \cdot S_{\Delta AA_1D_1D} = 7\sqrt{2}\,\sqrt{82} \text{ см}^2$$

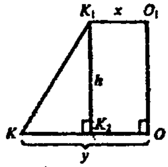
$$S_{полн} = S_{бок} + S_{ABCD} + S_{\Delta A_1B_1C_1D_1} = 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{82} + 50 + 8 = 7\sqrt{2}\,\sqrt{82} + 58 =$$

$$= (14\sqrt{41} + 58) \text{ см}^2.$$

в) Обозначим сторону верхнего основания b, нижнего основания a, a > b; радиус верхнего основания — r, нижнего основания — R. Следовательно, b=r, a=R.

Правильный 6-угольник состоит из 6 равносторонних треугольников; высота которых равна радиусу вписанной в 6-угольник окружности равного x. а в нижний 6-угольник – y. Из планиметрии известно, что

$$x = \frac{b\sqrt{3}}{2},\ y = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\ x = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ см. } y = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ см.}$$



Площадь нижнего основания пирамиды равна

$$6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot y\right) = 3 \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2} \text{ см}^2.$$

Площадь верхнего основания пирамиды равна

$$6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b \cdot x\right) = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 6\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

Все 6 боковых граней являются равными равнобедренными трапециями. Вычислим высоту трапеции. В плоскости верхнего основания построим отрезок O_1K_1 перпендикулярно к стороне 6-угольника; в нижней плоскости построим OK перпендикулярно одноименной стороне 6-угольника; проведем отрезок K_1K.

$OK = y$, $O_1K_1 = x$

$$KK_2 = y - x = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-b) = \frac{\sqrt{3}}{2}(R-r) = \frac{\sqrt{3}}{2}(5-2) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ см}$$

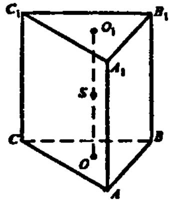
$$\text{Из } \Delta K_1K_2K:\ K_1K = \sqrt{h^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + \frac{27}{4}} = \frac{\sqrt{64+27}}{2} = \frac{\sqrt{91}}{2} \text{ см}^2$$

$$S_{бок} = 6\,\frac{a+b}{2} \cdot KK_1 = 3 \cdot (R+r) \cdot \frac{\sqrt{91}}{2} = 3(2+5)\frac{\sqrt{91}}{2} = \frac{21\sqrt{91}}{2}$$

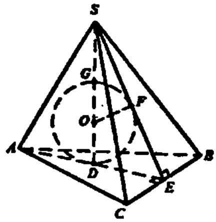
Площадь полной поверхности

$$S_{полн}=S_{бок}+S_{верхн}+S_{нижн}=\frac{21\sqrt{91}}{2}+6\sqrt{3}+\frac{75\sqrt{3}}{2}=\frac{21\sqrt{91}}{2}+\frac{87\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{3}{2}(7\sqrt{91}+29\sqrt{3})\text{ см}^2$$



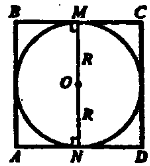
632. Очевидно, что центр сферы лежит в плос-кости α, параллельной основаниям, и проходящей через середины боковых ребер, т.к. она касается всех граней. Кроме того, центр сферы будет совпадать с центром треугольника (т.S), полученным пересечением призмы и плоскости α, а он лежит на отрезке OO_1, соединяющем центры оснований, что и требовалось доказать.



633. Рассмотрим для простоты треугольную правильную пирамиду. SD — высота пирамиды. Построим $AE\perp BC$, отрезок SE. По теореме о трех перпендикулярах $SE\perp CB$

Впишем в ΔSDE полуокружность DFG. Центр O окружности лежит на катете SD, и касается сторон DE и SE ΔSED вместе с полуокружностью DFG повернем вокруг SD Тогда точка E опишет окружность, вписанную в ΔABC, то есть гипотенуза SE при вращении останется внутри пирамиды, кпроме в трех положений, когда SE совпадает с высотой боковых граней.

Т.е. сфера, образованная вращением полуокружности DFG, имеет единственную общую точку с каждой из боковых граней. Эта сфера касается основания пирамиды в точке D.

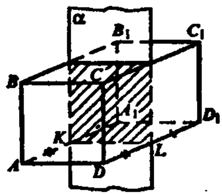


Центр вписанной в пирамиду ΔABC сферы лежит на высоте SD.

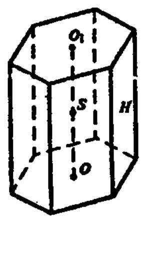
634. а) Рассмотрим сечение, проходящее через ось. Получим квадрат и вписанную в него окружность, ее радиус равен радиусу сферы. Обозначим ребро куба через x; $x =$

$= 2R$. Площадь одной грани равна x^2, или $4R^2$.

$$S_{полн} = 6\cdot 4R^2 = 24R^2$$



б) Высота призмы O_1O равна диаметру сферы; точки касания сферы с боковыми гранями лежат в сечении призмы плоскостью, которая проходит через середину высоты призмы (центр сферы) перпендикулярно к боковым ребрам.

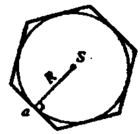


Пусть сторона правильного 6-угольника равна x, тогда $x=\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Боковая грань — прямоугольник, его площадь равна

$H\ x$ или $2R\cdot\frac{2R}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}R^2$

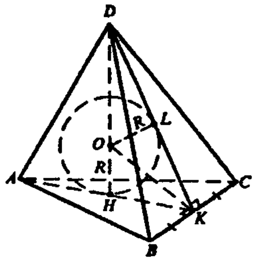
Вычислим площадь боковой поверхности:



$$6 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} R^2 = \frac{24}{\sqrt{3}} R^2 = \frac{24\sqrt{3}}{3} R^2 = 8\sqrt{3} R^2$$

Площадь основания состоит из площадей 6-ти равносторонних треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2} \cdot xR = \frac{1}{2} \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} \cdot R = \frac{R^2}{\sqrt{3}}$. Тогда площадь основания равна $\frac{6R^2}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} R^2 =$

$= 2\sqrt{3}R^2 \quad S_{полн} = 8\sqrt{3}R^2 + 2\sqrt{3}R^2 + 2\sqrt{3}R^2 = 12\sqrt{3}R^2$



в) Все ребра тетраэдра равны; пусть они равны x. Построим AK ⊥ BC, отрезок DK. В правильном ΔABC AK проходит через центр ΔABC. По теореме о трех перпендикулярах DK ⊥ BC. ∠AKD — линейный угол двугранного угла при основании тетраэдра (все двугранные углы равны).

ΔOKL=ΔOKH, OK — биссектриса ∠AKD.

Из ΔDBK: DK$= \sqrt{DB^2 - BK^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

HK — радиус вписанной окружности, HK$= \frac{x}{2\sqrt{3}}$

Пусть ∠DKH$= \varphi$

В ΔDKH: $\cos\varphi = \frac{HK}{DK}\ \frac{a}{2\sqrt{3}} . \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a}{2\sqrt{3}\sqrt{3a}} = \frac{1}{3}$

$\sin\varphi\ \ \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{1 + \frac{1}{3}} \frac{2\sqrt{2}}{3} : \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

из ΔOHK. $\frac{R}{HK} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, отсюда HK$= \frac{x}{2\sqrt{3}} = \frac{R}{tg\frac{\varphi}{2}} = 2\sqrt{R}$

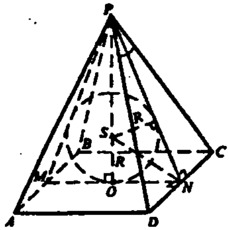
x=2 $\sqrt{3}\sqrt{2}$ R=2 $\sqrt{6}$ R.

$S_{\Delta ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\ 6 \cdot \sqrt{3}}{4}\ R^2 = 6\sqrt{3}\ R^2$

Грани правильного тетраэдра — это равные равносторонние треугольники, поэтому площадь полной поверхности S=4 · $S_{\Delta ABC}$=24 $\sqrt{3}$ R^2

635. PO — высота пирамиды. Проведем прямую MN параллельную AD через точку O, отрезки PM и PN По теореме о трех перпендикулярах

PN⊥DC, PM ⊥ AB. Центр сферы совпадает с точкой пересечения биссектрис двугранных углов при основании: также известно, что центр сферы, вписанной в правильную пирамиду, лежит на высоте пирамиды. Значит, SN — биссектриса ∠PNO — линейный угол двугранного угла при основании пирамиды.



Обозначим AD=x, PN=ℓ .tg $\frac{\varphi}{2}=\frac{x}{2\ell}, \ell=\frac{x}{2tg\frac{\varphi}{2}}$

$\angle$ DPC=φ $\angle$ PNO= Ψ .

В ΔPON: cos $\Psi=\frac{ON}{PN}=\frac{x}{2\ell}=\frac{x}{2}:\frac{x}{2tg\frac{\varphi}{2}}$=tg $\frac{\varphi}{2}$

$\sin\ \Psi=\sqrt{1-\cos^2\Psi}=\sqrt{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}$.

В Δ SON: tg $\frac{\varphi}{2}=\frac{SO}{ON}=\frac{2R}{a}$; $\frac{2R}{x}=\frac{\sin\Psi}{1+\cos\Psi}=\frac{\sqrt{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}}{1+tg\frac{\varphi}{2}}$. отсюда x=$\frac{2R(1+tg\frac{\varphi}{2})}{\sqrt{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}}$

$$x=\frac{2R(1+tg\frac{\varphi}{2})}{\sqrt{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}}\cdot\frac{1}{2tg\frac{\varphi}{2}}=\frac{R(1+tg\frac{\varphi}{2})}{tg\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}};$$

$$S_{\Delta DCP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{R(1+tg\frac{\varphi}{2})}{tg\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}}\cdot\frac{R(1+tg\frac{\varphi}{2})}{\sqrt{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}}=\frac{R^2(1+tg\frac{\varphi}{2})^2}{(1-tg^2\frac{\varphi}{2})\cdot tg\frac{\varphi}{2}}=\frac{R^2(1+tg\frac{\varphi}{2})}{(1-tg\frac{\varphi}{2})\cdot tg\frac{\varphi}{2}}$$

$$S_{бок}=4\cdot S_{\Delta DCP}=\frac{4R^2(1+tg\frac{\varphi}{2})}{tg\frac{\varphi}{2}(1-tg\frac{\varphi}{2})}=\frac{4R^2}{tg\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}};$$

$\cos\varphi=\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}=(\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2})(\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2})$,

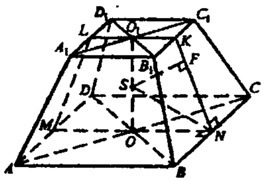
отсюда $\cos\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\cos\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}-\sin\frac{\varphi}{2}}$.

Итак, $S_{бок}=\frac{4R^2}{tg\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}-2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}}=\frac{4R^2}{tg\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}$.

При R=5 см и φ =60 ° получим:

$$S_{бок}=\frac{4\cdot 25}{tg30^\circ}\cdot\frac{\cos 60^\circ}{1-\sin 60^\circ}=\frac{100}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=100\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2(1-\frac{\sqrt{3}}{2})}=\frac{100(2+\sqrt{3})\sqrt{3}}{4-3}=$$

$$=100\sqrt{3}(2+\sqrt{3})\ \text{см}^2$$



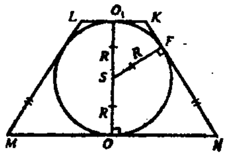
636. Боковые грани — это равнобедренные трапеции.

В правильной усеченной пирамиде, центр вписанной в нее сферы лежит на середине отрезка OO_1, где O и O_1 — центры оснований. Это следует из теоремы о центре сферы вписанной в правильную пирамиду. (см. задачу № 633).

В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

ML+KN=LK+MN

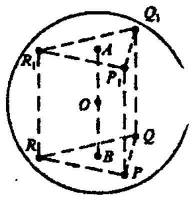
2KN=LK+MN



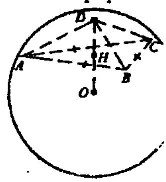
$KN=\frac{LK+MN}{2}=\frac{B_1C_1+BC}{2}$ (в основаниях — квадраты, $LK=A_1B_1=B_1C_1$ и MN=AB=BC).

Доказано.

637. а) В основаниях призмы лежат равносторонние треугольники. Пусть A и B — центры оснований.



Все точки, которые лежат на перпендикуляре, проведенному через точку B к верхнему основанию призмы равноудалены от вершин треугольника PQR. Все точки, которые лежат на перпендикуляре, проведенному через т. A, к верхнему основанию призмы, равноудалены от вершин $\Delta P_1Q_1R_1$. Т.к. призма правильная, то треугольники P_1Q_1R и PQR проектируются один на другой, следовательно, точка B проектируется в точку A и обратно. Поэтому, $AB\perp$ плоскости PQR. Тогда, отрезок AB является геометрическим местом точек, равноудаленных от вершин каждого из треугольников. А его середина — точка O — равноудалена от вершин $\Delta P_1Q_1R_1$ и от вершин ΔPQR на расстояние R, равное радиусу описанной около призмы сферы.



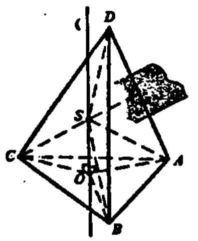
б) Построим из вершины D пирамиды высоту $DH\perp$ плоскости ABC. Проведем отрезки HA, HB, HC.

$\Delta DHA=\Delta DHB=\Delta DHC$ (они прямоугольные, DH — общий катет, AD=BD=BC — по условию).

HA=HB=HC=r r — радиус описанной около Δ ABC окружности.

Проведем отрезок $OG\perp$ плоскости ABC (точка G на рисунке не показана). Проведем отрезки GA, GB, GC, OA, OB, OC, $\Delta DCA=\Delta OGB=\Delta OGC$ (катет OG — общий, OA=OB=OC —R, R — радиус сферы). Значит, GA=GB=GC=r, r — радиус окружности, описанной около ΔABC Следовательно, вокруг ΔABC можно описать единственную окружность.

Точки H и G совпадают, и точки D, H, O лежат на одной прямой. Следовательно, центр сферы O лежит на высоте пирамиды DH или на продолжении за точку H, что и показано на рисунке.



638. Тетраэдр — это пространственный четырехугольник.

а) Докажем, что через любые 4 точки, не лежащие в одной плоскости, можно провести сферу и притом только одну. (см.ниже).

Геометрическим местом точек пространства, равноудаленных от концов отрезка, является плоскость, перпендикулярная этому отрезку и проведенная через его середину. Следовательно, центр сферы, описанной около тетраэдра, принадлежит каждой из плоскостей, проведенных через середины ребрер тетраэдра перпендикулярно к этим ребрам.

Пусть O — центр окружности, описанной около грани ABC тетраэдра, d— прямая, которая проходит через точку O, $d \perp$ плоскости ABC. Все точки прямой d равноудалены от точек A, B и C. (OA=OB=OC=r — радиус описанной окружности). Если точка $S \in d$, то прямоугольные треугольники SOA, SOB, SOC равны двум катетам. Следовательно, SA=SB=SC.

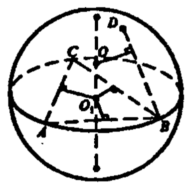
Пусть плоскость α проходит через середину ребра DA и плоскость $\alpha \perp DA$. Докажем, что d и α пересекаются. Предположим, что $\alpha \parallel d$.

Если $\alpha \perp AD$ и $d \parallel \alpha$, то $AD \perp d$. Кроме того, $d \perp AB$ (поскольку $d \perp$ плоскости ABC), и, значит $d \perp ABD$ — по признаку перпендикулярности прямой плоскости.

Таким образом, через точку A проведены две различные плоскости ABC и ABD, перпендикулярные к одной прямой, что невозможно. Значит предположение, что $d \parallel \alpha$ неверно.

Значит, пусть точка S точка пересечения d и α. Тогда SD=SA, т.к. S принадлежит каждой плоскости, проходящей через середину ребра тетраэдра и перпендикуляра к этому ребру.

$O_1 \in$ плоскости ABC.



Пусть точка O равноудаленна от всех вершин тетраэдра.

Расстояние от точки O до одной из вершин тетра-эдра обозначим R. Сфера с центром O и радиусом R проходит через все данные точки. Из этого доказательства следует, что такая сфера может быть только одна.

Что и требовалось доказать.

б) Рассмотрим двугранный угол. Геометрическое место точек, равноудаленных от обеих граней двугранного угла, это плоскость, которая делит двугранный угол пополам. Значит центр сферы, вписанной в тетраэдр, равноудален от всех граней пирамиды, и он должен принадлежать каждой из биссекторных плоскостей, то есть это точка пересечения биссекторных плоскостей всех двугранных углов тетраэдра. Т.к. все точки биссекторной плоскости лежат между гранями двугранного угла, то центр сферы, вписанной в тетраэдр, всегда находится внутри тетраэдра.

Центр у вписанной сферы может быть только один. Сфера с радиусом, равным расстоянию от этой точки до плоскости какой-либо грани тетраэдра, касается всех граней тетраэдра. Следовательно, в любой тетраэдр можно вписать сферу и притом только одну.

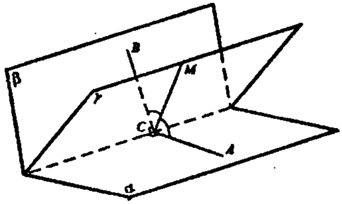
Теперь докажем 2 факта, которые использовались в доказательстве.

1) В любой трехгранный угол можно вписать сферу.

2) Биссекторные плоскости двугранных углов тетраэдра пересекаются в одной точке.

1. $M \in \gamma$

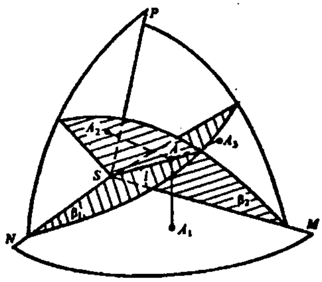
$\angle ACB$ — линейный угол двугранного угла между плоскостями α и β.



Пусть γ делит этот двугранный угол так, что $\angle BCM = \angle ACM$. Таким образом, γ биссекторная плоскость данного двугранного угла.

Докажем, что биссекторные плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одному лучу.

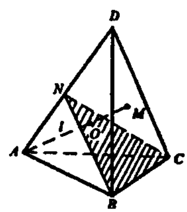
β_1 и β_2 — биссекторные плоскости, их пересечение — луч, с началом в точке S — вершине тетраэдра. Луч обозначим l. Пусть точка $A \in l$, A — произвольная точка луча. Проведем перпендикуляры AA_1, AA_2, AA_3 на грани трехгранного угла. $A \in \beta_1$, таким образом, $AA_2 = AA_1$, $A \in \beta_2$, поэтому $AA_3 = AA_1$



Тогда, $AA_1 = AA_2 = AA_3$, то есть точка A равноудалена от плоскостей граней NSB и MSB. Значит, точка A находится на биссекторной плоскости двугранного угла с ребром SP. А т.к. точка A произвольная точка, то и весь луч находится в биссекторной плоскости.

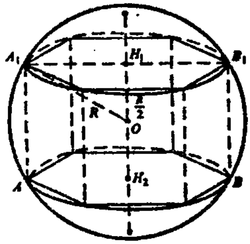
Значит, все три биссекторные плоскости пересекаются по одному лучу, любая точка которых равноудалена.

2. Пусть l — луч, по которому пересекаются биссекторные плосксти трехгранного угла при вершине A, M — точка пересечения луча l и грани BDC. Концы отрезка AM принадлежат разным граням двугранного угла при ребре BC, поэтому биссекторная плоскость этого двугранного угла пересечет отрезок AM в точке $O \in l$, поэтому она равноудалена от плоскостей ABC и ABD и ACD. Расстояние от точки O до плоскостей ABC и BCD равны, т.к. точка O принадлежит биссекторной плоскости двугранного угла при ребре BC. Таким образом, точка O равноудалена от всех граней тетраэдра, то есть принадлежит всем биссекторным плоскостям двугранных углов тетраэдра. Таким образом, биссекторные плоскости двугранных углов тетраэдра пересекаются в одной точке.



Оба утверждения доказаны.

639. а) Центр сферы совпадает с центром куба — точкой пересечения диагоналей куба. Пусть сторона основания и (его ребро) равно x. Тогда диагональ куба $d=\sqrt{3}\,x$. С другой стороны, $d=2R$.



$2R=\sqrt{3}\,x$, $x=\frac{2}{\sqrt{3}}R$ Площади поверхностей одной грани равна x^2, а полная поверхность куба равна $6x^2$.

$$6x^2=6\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 R^2=\frac{6\cdot 4}{3}R^2=8R^2$$

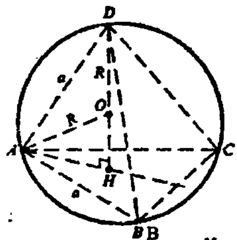
б) H_1 и H_2 — центры оснований призмы; H_1H_2 — высота призмы. Рассмотрим сечение призмы плоскостью, проходящей через диаметр оснований призмы. Сечение является прямоугольником AA_1B_1B.

Из прямоугольного ΔOA_1H_1: $A_1H_1=\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

A_1H_1 является радиусом описанной окружности около основания призмы, а в правильном 6-угольнике его сторона равна радиусу описанной окружности

Пусть сторона основания равна x, следовательно, $x=\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

$S_{бок}=6xR=3\sqrt{3}\,R^2$. $S_{полн}=3\sqrt{3}\,R^2+2\,S_{осн}=3\sqrt{3}\,R^2+3\sqrt{3}\,x^2=3\sqrt{3}\,(R^2+$ $+\frac{R^2\,3}{4})=3\sqrt{3}\,R^2\,\frac{7}{4}=\frac{21\sqrt{3}}{4}\,R^2$

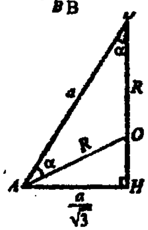


в) Пусть ребро тетраэдра равно x. Центр описанной сферы лежит на высоте DH, точка H — центр ΔABC, поэтому $HA=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Из прямоугольного ΔADH:

$DH=\sqrt{x^2-HA^2}=x\sqrt{\frac{2}{3}}$. $\angle ADH=\varphi$

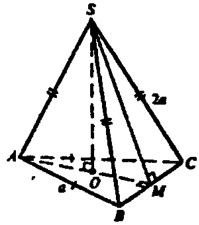
$\cos\varphi=\frac{DH}{AD}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.



Из ΔAOD по теореме косинусов :

$x^2=2R^2-2R^2\cos(180°-2\varphi)=2R^2+2R^2\cos 2\varphi=2R^2(1+$ $+2\cos^2\varphi-1)=4R^2\cos^2\varphi=\frac{8}{3}R^2$.

Площадь грани тетраэдра равна $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$; равны и их Н,



значит

$S_{полн}=4\cdot\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=x^2\sqrt{3}=\frac{8}{3}R^2\sqrt{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}R^2$.

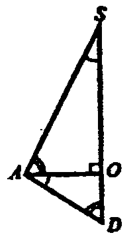
640. SO — высота пирамиды; SO=h.

Пусть O — центр основания пирамиды, M — середина BC, AM — высота в ΔABC.

$AO=\frac{x\sqrt{3}}{3}$, $OM=\frac{x\sqrt{3}}{6}$.

Центры обеих сфер лежат на прямой SO, SO $\perp$ плоскости AB.

Обозначим R — радиус описанной сферы. Продолжим SO до пересечения с описанной сферой в точке D. SD — диаметр шара, $\angle SAD=90°$. Из подобия треугольников OAS и ODA:



$OD=\frac{AO^2}{OS}=\frac{x^2}{3h}\left(AO=\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$

$2R=SD=SO+OD=h+\frac{x^2}{3h}=\frac{3h^2+a^2}{3h}$,

$R=\frac{3h^2+x^2}{2\cdot 3h}=\frac{3h^2+x^2}{6h}$. Проведем апофему SM.

Из ΔSMC: $SM=\sqrt{SC^2-CM^2}=\sqrt{4a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{x\sqrt{15}}{2}$.

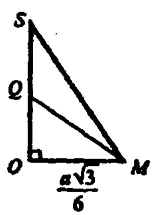
$OM=\frac{x}{2\sqrt{3}}$, поэтому из ΔSOM:

$h=SO=\sqrt{SM^2-OM^2}=\sqrt{\frac{15x^2}{4}-\frac{x^2}{12}}=\sqrt{\frac{44x^2}{12}}=x\sqrt{\frac{11}{3}}$

$R=\frac{3x^2\cdot\frac{11}{3}+x^2}{6x\sqrt{\frac{11}{3}}}=\frac{12x}{6\sqrt{\frac{11}{3}}}=\frac{2\sqrt{3x}}{\sqrt{11}}=\frac{2x\sqrt{33}}{11}=\frac{2\sqrt{33}}{11}x$

Вычислим радиус r вписанной сферы.

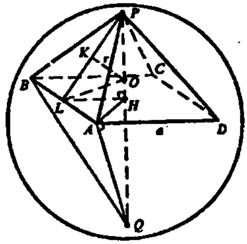
Примем Q — центр вписанного шара, следовательно в ΔSOM; QM — биссектриса $\angle SMO$; QO=r; $SM=\frac{x\sqrt{15}}{2}$.



По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника:

$\frac{OQ}{SQ}=\frac{OM}{SM}$; $\frac{r}{h-r}=\frac{x\sqrt{3}\cdot 2}{6x\sqrt{15}}=\frac{1}{3\sqrt{5}}$; $h=x\cdot\sqrt{\frac{11}{3}}$.

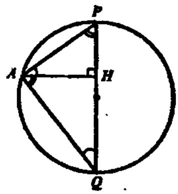
$$r\left(3\sqrt{5}+1\right)=h \qquad r=\frac{x\cdot\sqrt{11}}{\sqrt{3}\cdot\left(3\sqrt{5}+1\right)}=\frac{\left(3\sqrt{5}-1\right)}{4\sqrt{33}}x$$



641. Продолжим высоту пирамиды PH до пересечения со сферой в точке Q. PQ — диаметр и центр описанной сферы лежит на высоте HP, или на ее продолжении за точку H. Соединим отрезком точку A с точкой H. Рассмотрим сечение плоскостью APQ.

$\angle QAP=90°$ так как опирается на диаметр, Из подобия ΔHPA и ΔHAQ,

$\frac{AH}{PH}=\frac{HQ}{AH}$, $AH^2=HQ\cdot PH$, $PQ=10$, $PH=h$.



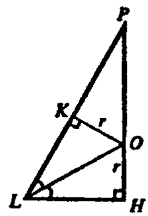
Примем x — сторона основания, следовательно,

$$AH=\frac{1}{2}x\sqrt{2}=\frac{x\sqrt{2}}{2}$$

Следовательно. $\frac{x^2}{2}=h\,(10-h)$. (1)

Построим $HL\perp AB$, отрезок PL. $LH=\frac{x}{2}$, плоскость $PLH\perp$ плоскость ABP Пусть O — центр вписанной сферы, $OK\perp PL$.

$OH=OK=r$. OL — биссектриса $\angle HLP$.



$$PL=\sqrt{h^2+LH^2}=\sqrt{h^2-\frac{x^2}{4}}$$

Обозначим $\angle HLP=\varphi$.

$$\sin\varphi=\frac{PH}{LP}=\frac{h}{\sqrt{h^2+\frac{x^2}{4}}}=\frac{2h}{\sqrt{4h^2+x^2}}.$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{4h^2+x^2}}$$

Из ΔOLH $\frac{OH}{LH}=\frac{r}{\frac{x}{2}}$ $2=\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$, $r=2=\frac{x}{2}\ \mathrm{tg}\frac{\psi}{2}$

$$\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{1-\frac{x}{\sqrt{4h^2+x^2}}}{\frac{2h}{\sqrt{4h^2+x}}}=\frac{\sqrt{4h^2+x^2}-x}{2h},$$

$$\frac{x}{2}\ \frac{\sqrt{4h^2+a^2}-a}{2h}=2, \qquad (2)$$

Решим систему·

$x\sqrt{4h^2+x^2}=x^2+8h$

$$\begin{cases} x\sqrt{4h^2+x^2}=x^2+8h & (3) \\ x^2=2h(10-h) & (4) \end{cases}$$

$x^2(4h^2+x^2)=x^4+64h^2+16x^2h$,

$4h^2x^2+x^4=x^4+64h^2+16x^2h$

Разделим все на 4h, $h \neq 0$

$x^2(4-h)+16h=0$,

Подставим x^2 из (4)

$2(10h-h^2)(4-h)+16h=0$

Разделим обе части на 2h, $h \neq 0$

$(10-h)(4-h)+8=0$

$h^2-14h+48=0$

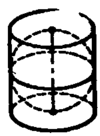
$h_{1,2}=7 \pm \sqrt{49-48}=7 \pm 1$

$h_1=8$ или $h_2=6$; $x_1^2=20\cdot8-2\cdot64=160-128=3\_$,

$x_1=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$,

$x_2^2=20\cdot6-2\cdot36=120-72=48$, $x_2=4\sqrt{3}$.

642. Рассмотрим осевое сечение плоскостью ABCD. R — радиус сферы. Очевидно, ABCD — квадрат, $\Delta OBF=\Delta OBH_1$.



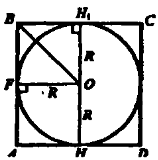
$BH_1=OH_1=R$, BH_1 — радиус основания цилиндра,

$HH_1=2R$ — высота цилиндра.

Вычислим площадь полной поверхности цилиндра.

$S_{полн}=S_{бок}+2S_{осн}$; $S_{бок}=2\pi\cdot BH_1\cdot HH_1=2\pi R\cdot2R=4\pi R^2$,

$S_{осн}=\pi BH_1^2=\pi R^2$; $S_{полн}=4\pi R^2+2\pi R^2=6\pi R^2$.



Площадь поверхности сферы $4\pi R^2$ $\dfrac{S_{сф}}{S_{полн}}=\dfrac{4\pi R^2}{6\pi R^2}=\dfrac{2}{3}$

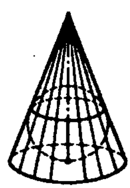
643. Рассмотрим осевое сечение.

а) Высота SH делит ΔASB на два равных треугольника: SH — биссектриса угла φ.

В ΔHBS: $\angle HBS=90°-\dfrac{\varphi}{2}$.

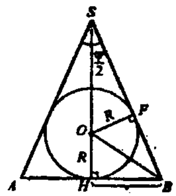
OB — биссектриса $\angle HBS$; следовательно, $\angle HBO=\dfrac{\angle HBS}{2}$

Из прямоугольного ΔOHB: $\dfrac{R}{r}=\text{tg}\angle HBO=\text{tg}(45°-\dfrac{\varphi}{4})$,



$$r=\frac{R}{\text{tg}(45°-\frac{\varphi}{4})}=\frac{R}{\text{ctg}\left(90°-(45°-\frac{\varphi}{4})\right)}=\frac{R}{\text{ctg}(45°+\frac{\varphi}{4})}=R\,\text{tg}\,(45°+\frac{\varphi}{4}).$$

б) $\frac{R}{r} = \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\varphi}{4})$, $R = r\operatorname{tg}(45^\circ - \frac{\varphi}{4})$ ($\frac{\varphi}{4}$ — острый угол),



в) $\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right) = \frac{R}{r} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}30^\circ$

$45^\circ - \frac{\varphi}{4} = 30^\circ \Rightarrow \varphi = 60^\circ$ (φ — острый угол)

644. Рассмотрим осевое сечение. SH — высота конуса;

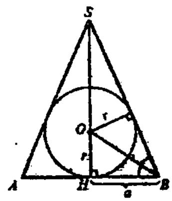
OB — биссектриса $\angle HBS$, $\angle OBH = \frac{\alpha}{2}$.

В ΔOBH: $\frac{r}{BH} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Найдем площадь основания конуса, обозначив

HB=a: $S_{осн} = \pi a^2 = \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

Обозначим SB=d. Из ΔSHB: $\frac{a}{d} = \cos\alpha$, $d = \frac{a}{\cos\alpha} = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha}$

Вычислим площадь боковой поверхности конуса:



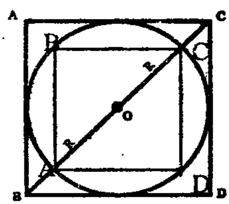
$$S_{бок} = \pi a d = \frac{\pi r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{r}{\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\pi r^2}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = \frac{2\pi r^2 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha}$$

645. Рассмотрим осевое сечение.

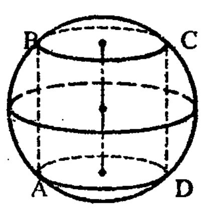
Высота цилиндра равна образующей, а т.к. образующая равна диаметру основания, то ABCD — квадрат



Обозначим AD=x, радиус сферы равен R.

Из Δ ADC: $AC^2 = (2R)^2 = x^2 + x^2$; $2R = x\sqrt{2}$, $R = \frac{x\sqrt{2}}{2}$

Вычислим площадь сферы $4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{x^2}{2} = 2\pi x^2$



Радиус основания цилиндра $\frac{x}{2}$

$S_{бок} = 2\pi \frac{x}{2} x = \pi x^2$ $S_{осн} = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{4}$;

$S_{полн}=S_{бок}+2S_{осн}=\pi x^2+\frac{\pi x^2}{4}\quad 2=\pi x^2+\frac{\pi x^2}{2}=\frac{3\pi x^2}{2}$,

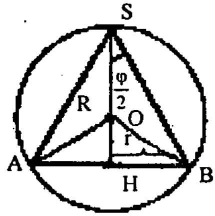
$$\frac{S_{полн}}{S_{сф}}=\frac{\frac{3\pi x^2}{2}}{2\pi x^2}=\frac{3}{4}$$

646. Рассмотрим осевое сечение конуса и сферы. SH — высота конуса SO=OB=OA=R. Тогда из равнобедренного ΔSOB: $\angle OSB=\angle SBO=\frac{\varphi}{2}$

Из прямоугольного треугольника ΔSHB:

$\angle OBH=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$ и

$\frac{r}{R}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi$



а) $r=R\cdot\cos\varphi$

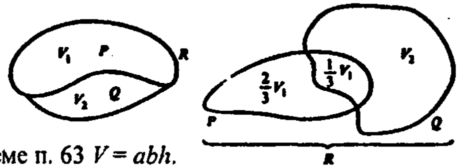
б) $R=\frac{r}{\cos\varphi}$

в) $\cos\varphi=\frac{r}{R}=\frac{r}{2r}=\frac{1}{2}\quad \varphi=60^\circ$

647. Вычислим искомый объем

а) $R' = V_1 + V_2$.

б) $R = V - \frac{1}{3}V_1 + V_2 = \frac{2}{3}V_1 + V_2$.



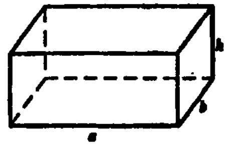
648. Вычислим объем по теореме п. 63 $V = abh$.

а) $V = 11\cdot12\cdot15 = 11\cdot180 = 1980$;

б) $V = 3\sqrt{2}\sqrt{5}\ 10\sqrt{10} = 30\sqrt{10}\sqrt{10} = 300$;

в) $V = 18\cdot5\sqrt{3}\cdot13 = 90\cdot13\sqrt{3} = 1170\sqrt{3}$;

г) $V = 3\frac{1}{3}\cdot\sqrt{5}\cdot0{,}96 = \frac{10\ 0{,}96}{3}\sqrt{5} = 3{,}2\sqrt{5}$



649. а) $AC = 12$ см. Обозначим ребро куба x, следовательно из ΔACD:

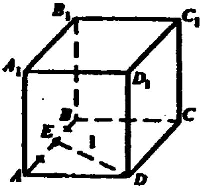
$x\sqrt{2} = 12$, $x = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$; $V = x^3 = (6\sqrt{2})^3 = 432\sqrt{2}$ (см³);

б) $AC_1 = 3\sqrt{2}$ (м). Обозначим сторону куба за x.

$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 = (x^2 + x^2) + x^2 = 3x^2$,

$AC_1 = x\sqrt{3}$. $3\sqrt{2} = x\sqrt{3}$, $x = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$;

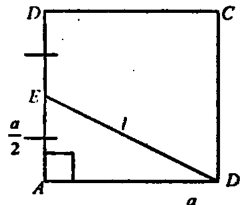
$V = x^3 = (\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^3 = \frac{3\cdot3\cdot3\cdot2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = 6\sqrt{6}$ (м³);



в) $DE = 1$ см Обозначим ребро куба за x.

Из ΔEAD $1 = x^2 + \frac{x^2}{4} = \frac{5}{4}x^2$; $x^2 = \frac{4}{5}$; $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

$V = x^3 = (\frac{2}{\sqrt{5}})^3 = \frac{8}{5\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{25} = 0{,}32\sqrt{5}$ (см³).



650. Вычислим объем параллелепипеда: $V_{пар} = 8\cdot12\cdot18 = 96\cdot18 = 1728$ (см³).
Обозначим ребро куба за x, следовательно, $V_{куба} = x^3$
Откуда $x^3 = 1728$. следовательно, $a = \sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{12\cdot144} = \sqrt[3]{12\ 12\cdot12} = 12$ (см).

651. $m = \rho V$ $V = 25\cdot12\cdot6{,}5 = 1950$ (см³). $m = 1{,}8\cdot1950 = 3510$ (г) $= 3{,}51$ (кг).

652. Обозначим стороны $AB = a$, $BC = b$ и $CC_1 = c$. Тогда условия выглядят так

$a^2 + b^2 = 12^2 = 144$, (1)

$b^2 + c^2 = 11^2 = 121$, (2)

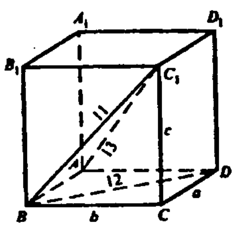
$a^2 + b^2 + c^2 = 13^2 = 169$ (3)

($a^2 + b^2 = AC^2$. $AC^2 + C_1C^2 = AC_1^2$).

$a^2 + b^2 = 144$,

$a^2 + b^2 + c^2 = 169$.

$b^2 + c^2 = 121$.

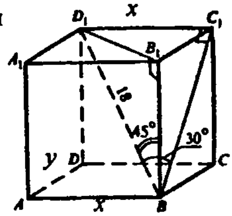


$c^2 = 169 - (a^2 + b^2) = 169 - 144 = 25 = 5$ (см);

$b^2 = 121 - c^2 = 121 - 25 = 96;\ \ b = \sqrt{96} = \sqrt{16 \cdot 6} = 4\sqrt{6}$ (см);

$a^2 = 144 - b^2 = 144 - 96 = 48;\ \ a = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$ (см).

$V = abc = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 5 = 80\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 2} = 240\sqrt{2}$ (см^3).



653. BC_1 — проекция D_1B на плоскость боковой грани BB_1C_1C, поэтому $\angle D_1BC_1 = 30°$, $\angle DBB_1 = 45°$.

Вычислим — из прямоугольного ΔD_1C_1B:

$D_1C_1 = 9$ см как катет лежащий против угла в $30°$

Из прямоугольного

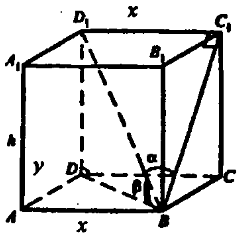
ΔD_1B_1B: $B_1B = 18\sin 45° = 18\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$ (см).

$D_1B^2 = d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Значит, $18^2 = 9^2 + (9\sqrt{2})^2 + B_1C_1^2$.

$B_1C_1^2 = 18^2 - 9^2 - \left(9\sqrt{2}\right)^2 = 9^2(4 - 2 - 1) = 9^2$, отсюда $B_1C_1 = 9$ (см).

$V = 9 \cdot 9\sqrt{2} \cdot 9 = 729\sqrt{2}$ (см^3).

654. Заметим, что DB — проекция диагонали на плоскость основания, $\angle D_1BD = \beta$; BC_1 — проекция диагонали на плоскость боковой грани, $\angle D_1BC = \alpha$, $DD_1 = AA_1 = h$.



Из треугольника ΔD_1DB: $\dfrac{DD_1}{DB} = \mathrm{tg}\beta$,

$$\frac{h}{DB} = \mathrm{tg}\beta, \quad DB = \frac{h}{tg\beta}; \quad D_1B = \frac{DD_1}{\sin\beta} = \frac{h}{\sin\beta}.$$

Обозначим $AB = x$, $AD = y$.

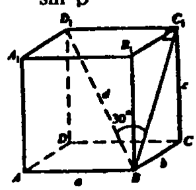
Из треугольника ΔADB: $x^2 + y^2 = DB^2 = \dfrac{h^2}{tg^2\beta}$.

Из треугольника ΔD_1BC_1: $D_1C_1 = D_1B\sin\alpha$; $\quad x = \dfrac{h}{\sin\beta}\cdot\sin\alpha = \dfrac{h\sin\alpha}{\sin\beta}$,

$$y^2 = \frac{h^2}{tg^2\beta} - x^2 = \frac{h^2}{tg^2\beta} - \frac{h^2\sin^2\alpha}{\sin^2\beta},$$

$$y = \sqrt{h^2\left(\frac{1}{tg^2\beta} - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}\right)} = h\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}} = \frac{h}{\sin\beta}\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}.$$

Вычислим объем $V = xyh$; $V = \dfrac{h\sin\alpha}{\sin\beta}\dfrac{h}{\sin\beta}h\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha} = \dfrac{h^3\sin\alpha\sqrt{\cos^2\beta - \sin^2\alpha}}{\sin^2\beta}$

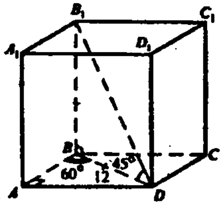


655. C_1B — проекция диагонали D_1B на плоскость боковой грани BB_1C_1C. Введем обозначение $AB = a$, $BC = b$, $D_1B = d$ и $C_1C = c$.

Из ΔD_1BC_1: $a = \dfrac{1}{2}$, $d = 2a$, $BC_1 = d\cos 30° = 2a\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Из треугольника ΔBC_1C: $b^2 + c^2 = BC_1^2 = 3a^2$. $c^2 = 3a^2 - b^2$, $c = \sqrt{3a^2 - b^2}$

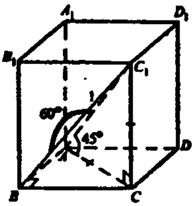
$V = S_{ABCD} \cdot CC_1$, $V = ab\sqrt{3a^2 - b^2}$.



656. Диагонали в прямоугольнике равны, $AC = BD = 12$ см. $A_1B_1 \parallel AB$, $AB \perp B_1B$ и $BD \perp B_1B$, $\angle ABD = 60°$ — линейный угол двугранного угла A_1B_1BD.

Из ΔB_1BD $B_1B = BD = 12$ см. Из ΔABD: $AB = \frac{1}{2}12 = 6$ см.

$AD = 12\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ см $V = 6 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 12 = 432\sqrt{3}$ см^3.

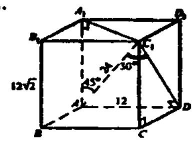


657. а) Заметим, что ΔC_1CA — равнобедренный прямоугольный, $CA = CC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ м,

$C_1B \perp AB$, ΔABC_1 — прямоугольный. $AB = \frac{1}{2}$ м.

Из ΔABC: $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ м.

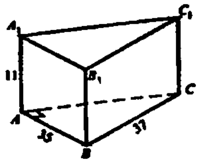
$V = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{8}\sqrt{2}$ м^3



б) Из ΔAA_1C_1: $AA_1 = AC_1 = 24\sin 45° = 24\frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$ см.

Из треугольника ΔA_1C_1D: $AD = \frac{1}{2}AC_1 = 12$ см,

$C_1D = 24\cos 30° = 24\frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ см.



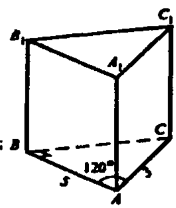
Из ΔC_1CD ($\angle C_1CD = 90°$): $(12\sqrt{3})^2 = (12\sqrt{2})^2 + CD^2$,

$CD^2 = 3 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12^2 = 12^2$; $CD = 12$ см.

$V = B_1B \cdot AD \cdot CD$; $V = 12\sqrt{2} \cdot 12 \cdot 12 = 1728\sqrt{2}$ см^3.

658. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC$. $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{37^2 - 35^2} = 12$ см.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 12 = 35 \cdot 6 = 210$ см^2. $V = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1 = 210 \cdot 11 = 2310$ см^3



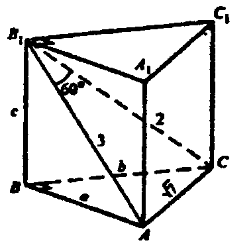
659. а) Из треугольника ΔABC по теореме косинусов:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos 120° = 25 + 9 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 49$;

$BC = 7$ см.

Т.к. $AA_1 = BB_1 = CC_1$, то максимальную площадь имеет т: у которой вторая сторона наибольшая, то есть $BC = 7$ см

$S_{BB_1C_1C} = 35,\ 35 = BB_1 \cdot 7,\ BB_1 = 5$ см.



$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 120° = \cdot\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 5 \cdot 3\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ см^2

$V = \frac{15\sqrt{3}}{4} \cdot 5 = \frac{75\sqrt{3}}{4}$ см^3.

б) Т.к. призма прямая, то $B_1 4$ перпендикулярна плоскости ABC, $B_1B \perp BC$. $\angle ABC = 90°$ — линейный угол двугранного угла с ребром B_1B

Из ΔAB_1C по теореме косинусов:

$AC^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 60° = 9 + 4 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 13 - 6 = 7,\ AC = \sqrt{7}$.

Обозначим $AB = a,\ BC = b,\ BB_1 = c$.

В треугольника ΔABC $a^2 + b^2 = 7$. (1)

В треугольника ΔAB_1B $a^2 + c^2 = 9$ (2)

В треугольника ΔCB_1B $b^2 + c^2 = 4$. (3)

Запишем систему:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 7, \\ a^2 + c^2 = 9, \\ b^2 + c^2 + = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = 7, \\ a^2 - b^2 = 5. \end{cases}$$

$2a^2 = 12,\ a^2 = 6,$ $a = \sqrt{6}$ см;

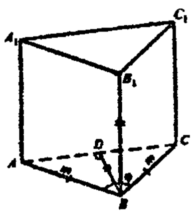
$b^2 = 7 - a^2 = 7 - 6 = 1,$ $b = 1$ см;

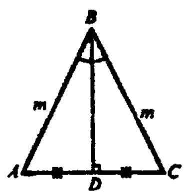
$c^2 = 4 - b^2 = 4 - 1 = 3,$ $c = \sqrt{3}$ см.

$V = S_{\Delta ABC} \cdot BB_1;\ V = \frac{1}{2}abc = \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{3} = 1,5\sqrt{2}$.

660. ΔABC — равнобедренный. Из треугольника ΔABD: $BD = m\cos\frac{\varphi}{2}$,

$BB_1 = m\cos\frac{\varphi}{2}$.





$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} m^2 \sin\varphi$.

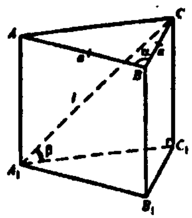
$V = S_{\Delta ABC} BB_1 = \frac{1}{2} m^2 \sin\varphi \times$

$\times m\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} m^3 \sin\varphi \cdot \cos\frac{\varphi}{2}$.

661. Обозначим $a = BA = BC$. Из прямоугольного ΔA_1B_1C: $A_1C_1 = l\cos\beta$, $CC_1 = l\sin\beta$. $AC = A_1C_1 = l\cos\beta$

По теореме косинусов в треугольнике ΔABC:
$AC^2 = l^2\cos^2\beta = a^2 + a^2 - 2a^2\cos\alpha = 2a^2(1 - \cos\alpha)$,

$$a^2 = \frac{l^2\cos^2\beta}{(1-\cos^2\alpha)\cdot 2}.$$



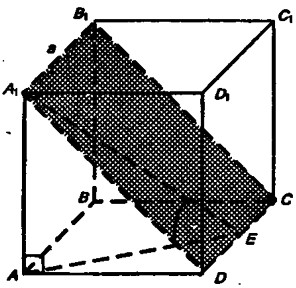
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\sin\alpha = \frac{1}{2}\times\frac{l^2\cos^2\beta}{2\cdot(1-\cos^2\alpha)}\sin\alpha;$$

$$V = S_{\Delta ABC}\,CC_1 = \frac{l^2\cos^2\beta\cdot\sin\alpha}{4\cdot(1-\cos^2\alpha)}\,l\sin\beta = \frac{l^3\sin\beta\cos^2\beta\cdot\sin\alpha}{4(1-\cos\alpha)} =$$

$$= \frac{l^3\sin\beta\cos^2\beta\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2}{4\;\;2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{l^3\sin\beta\cos^2\beta}{4tg\frac{\alpha}{2}}.$$

662. В сечении — параллелограмм A_1B_1CD. В плоскости сечения A_1B_1CD проведем A_1E перпендикуряно DC; проведем отрезок EA. По теореме, обратной теореме о трех перпендикулярах, $AE \perp DC$



$$S_{A_1B_1CD} = Q = DC\cdot A_1E = a\cdot A_1E;\ A_1E = \frac{Q}{a}.$$

Из прямоугольного треугольника ΔA_1AE:

$$AE = A_1E\cos\beta = \frac{Q}{a}\cos\beta;\ A_1A = \frac{Q}{a}\sin\beta.$$

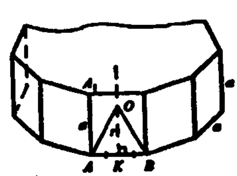
$$S_{ABCD} = AE\ BC = \frac{Q}{a}\cos\beta\,\alpha = Q\cos\beta.$$

$$V = S_{AbCD}\cdot AA_1 = Q\cdot\cos\beta\cdot\frac{Q}{a}\sin\beta = \frac{Q^2}{a}\sin\beta\cdot\cos\beta = \frac{Q^2}{2a}\sin 2\beta.$$

663. Имеем $OA = OB = R = \dfrac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$; $r = OK = \dfrac{a}{2tg\frac{180^\circ}{n}}$; $OK \perp AB$.

Правильный n-угольник состоит из n треугольников одинаковой площади.

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\cdot OK\cdot AB = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2tg\frac{180^\circ}{n}}\cdot a = \frac{a^2}{4tg\frac{180^\circ}{n}}$$



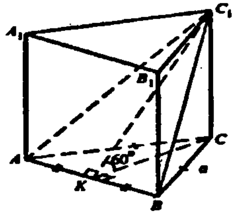
$$S_{осн} = nS_{\Delta AOB} = \frac{na^2}{4tg\frac{180^\circ}{n}}.\ V = S_{осн}\cdot AA_1 = \frac{na^3}{4tg\frac{180^\circ}{n}}.$$

Тогда: а) $n = 3$. $V = \dfrac{3a^3}{4tg60^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$, б) $n = 4$. $V = \dfrac{4a^3}{4tg45^\circ} = a^3$;

в) $n = 6.\ V = \dfrac{6a^3}{4tg30^\circ} = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{2} = 1{,}5\sqrt{3}\,a^3$; г) $n = 8.\ V = \dfrac{8a^3}{4tg\dfrac{45^\circ}{2}} = \dfrac{2a^3}{tg22^\circ30'}$

664. Построим $CK \perp AB$, отрезок C_1K в плоскости сечения AC_1B. По теореме о трех перпендикулярах $C_1K \perp AB$; $\angle C_1KC = 60^\circ$.

Из ΔC_1KC: $\dfrac{C_1C}{CK} = \text{tg}60^\circ = \sqrt{3}$, отсюда $C_1C = CK\sqrt{3}$.



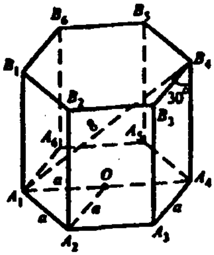
Из треугольника ΔCKB: $CK = \text{a}\sin60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$C_1C = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{3} = \dfrac{3a}{2}$. $S_{\Delta AOB} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$V = S_{\Delta AOB} \cdot C_1C = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{3a}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

665. Очевидно, что наибольшая из диагоналей — диагональ A_1B_4. Тогда A_1A_4 ее проекция на нижнее основание.

В правильном 6-угольнике $R = a$, R — радиус описанной окружности. $D = 2R = 2a = A_1A_4$.



Из треугольника $\Delta A_1A_4B_4$: $\dfrac{A_1A_4}{B_4A_4} = \text{tg}30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

$B_4A_4 = 2\sqrt{3}\,a$. $S_{A_1A_1...A_6} = 6S_{\Delta A_1OA_2}$.

$S_{\Delta A_1OA_2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}, \Rightarrow S_{A_1A_1...A_6} = \dfrac{6a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

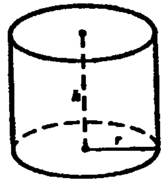
$V = S_{A_1A_1...A_6} \cdot B_4A_4 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \times 2\sqrt{3}a = 9a^3$.

Из треугольника $\Delta A_1B_4A_4$: $A_1A_4 = 2a = 8\sin30^\circ = 4$, $a = 2$ см.

Итак, $V = 9\cdot2^3 = 8\cdot9 = 72$ см^3.

666. По теореме п.66 а) $V = \pi r^2h$, $V = \pi\cdot(2\sqrt{2})^2\cdot3 = \pi\cdot8\cdot3 = 24\pi$ см^3;

б) $r^2 = \dfrac{V}{\pi h}$; $r^2 = \dfrac{120}{3,6\pi} = \dfrac{120\cdot10}{36\pi} = \dfrac{100}{3\pi}$; $r = \sqrt{\dfrac{100}{3\pi}} = \dfrac{10}{\sqrt{3\pi}}$ см;

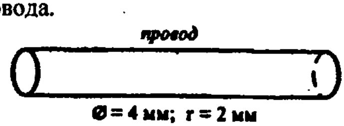


в) $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$, $h = \dfrac{8\pi}{\pi h^2} = \dfrac{8}{h^2}$, $h^3 = 8$, $h = 2$ см.

667. Провод в распрямленном положении — это цилиндр.

$V = \pi r^2 l$. r — радиус сечения; l — длина провода.

Из физики известно, что, $\rho = \dfrac{m}{v}$, где ρ — плотность алюминия; m — масса алюминия; V — объем куска провода.



Получаем уравнение: $\pi r^2 l = \dfrac{m}{\rho}$, отсюда $l = \dfrac{m}{\rho \pi r^2}$.

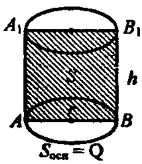
$r = 2$ мм $= 0{,}2$ см, $r^2 = 0{,}04$ см^2, $\pi \approx 3{,}14$, $\rho = 2{,}6$ г/см^3,

$l \approx \dfrac{6800}{2{,}6 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}04} = \dfrac{68 \cdot 100 \cdot 100}{2{,}6 \cdot 3{,}14 \cdot 4} \approx 2{,}08 \cdot 10^4$ см ≈ 20800 см $= 208$ м.

668. Вычислим объем цистерны $V = \pi r^2 h$, $r = \dfrac{18}{2} = 9$ м, $V = \pi \cdot 81 \cdot 7 = 567\pi$ м^3

$\rho = \dfrac{m}{V}$; $m = \rho V$; $m = 0{,}85 \cdot \dfrac{10^{-3}}{10^{-6}} \cdot 567 \cdot 3{,}14 = 0{,}85 \cdot 10^3 \cdot 567 \cdot 3{,}14 = 1513 \cdot 10^3$ кг $= 1513$ т.

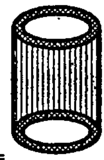
669. Обозначим радиус основания через r, а высота цилиндра равна h Следовательно $S = 2rh$. (1) $Q = \pi r^2$. (2) Тогда, $V = \pi r^2 h = Qh$.



Из (1) $r = \dfrac{S}{2h}$. Подставим в (2): $Q = \dfrac{\pi S^2}{4h^2}$, $h^2 = \dfrac{\pi S^2}{4Q}$;

$h = \dfrac{S}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{Q}}$. $V = Q\dfrac{S}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{Q}} = \dfrac{1}{2} S\sqrt{\pi Q}$.

670. $\rho = 11{,}4$ г/см^3 $= 11{,}4 \cdot 1\dfrac{10^{-3}}{10^{-6}}$ кг/м^3 $= 11{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3.

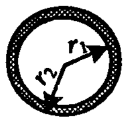


$r_1 = \dfrac{13}{2} = 6{,}5$ мм $= 6{,}5 \cdot 10^{-3}$ м. $r_2 = 6{,}5 + 4 = 10{,}5$ мм $= 10{,}5 \cdot 10^{-3}$ м.

$V_{трубы} = \pi r_2^2 l - \pi r_1^2 l = \pi l(r_2^2 - r_1^2) = 3{,}14 \cdot 25(10{,}5^2 \cdot 10^{-6} - 6{,}5^2 \cdot 10^{-6}) =$

$= 3{,}14 \cdot 25 \cdot 10^{-6}(10{,}5^2 - 6{,}5^2) = 3{,}14 \cdot 25 \cdot 10^{-6}(110{,}25^2 - 42{,}25) =$

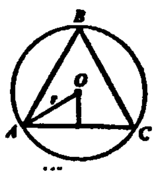
$= 3{,}14 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 68 = 5338 \cdot 10^{-6}$ м^3.



$m = \rho V$; $m = 11{,}4 \cdot 10^3 \cdot 5338 \cdot 10^{-6} = 60853{,}2 \cdot 10^{-3} \approx 60{,}85$кг ≈ 61кг

671. Очевидно, что высота призмы равна высоте цилиндр. Тогда отношение объемов равно отношению площадей оснований призмы и цилиндр.

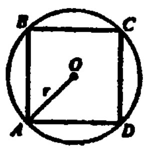
а) $n = 3$, ΔABC — правильный. Обозначим сторону ΔABC равной x, следовательно, $r = AO = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ $\left(\dfrac{x}{\sin 60^\circ} = 2r,\ r = \dfrac{x}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)$.



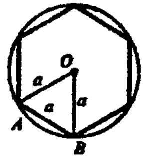
$SS_{\Delta AOB} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{кр} = \pi r^2 = \pi \cdot \dfrac{x^2}{3}$; $\dfrac{V_{пр}}{V_{цил}} = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{кр}} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{3}{\pi x^2}$ ...

б) $n = 4$, $ABCD$ — квадрат. Обозначим сторону квадрата равной x.

$S_{ABCD} = x^2$; $AC = x\sqrt{2}$, $r = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$.



$S_{кр} = \pi r^2 = \pi \cdot \dfrac{2x^2}{4} = \dfrac{\pi x^2}{2}$. $\dfrac{V_{пр}}{V_{цил}} = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{S_{кр}} = x^2 : \dfrac{\pi x^2}{2} = \dfrac{2}{\pi}$, в) $n = 6$. Обозначим сторону 6-угольника за x, следовательно, $r = x$.



$$S_{6\text{-уг}} = 6S_{\Delta AOB} = 6\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2.$$

$$S_{кр} = \pi AO^2 = \pi x^2. \quad \frac{V_{пр}}{V_{цил}} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2} : \pi x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi};$$

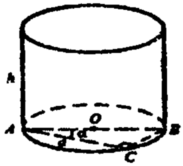
г) обозначим сторону правильного вписанного n-угольника за x. Следовательно, радиус описанной окружности равен $\dfrac{x}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$.

$$S_{n\text{-уг}} = nS_{\Delta} = n\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}\right)^2 \cdot \sin\frac{360^\circ}{n}.$$

(Правильный n-угольник разбивается радиусами, проведенными из центра, на n одинаковых треугольников; все треугольники равновелики)

$$S_{кр} = \pi\left(\frac{x}{2\sin^2\frac{180^\circ}{n}}\right)^2, \quad \frac{V_{пр}}{V_{цил}} = \frac{S_{n\text{-уг}}}{S_{кр}} = \frac{n\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}\right)^2\cdot\sin\frac{360^\circ}{n}}{\pi\cdot\left(\frac{x}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}\right)^2} = \frac{n}{2\pi}\sin\frac{360^\circ}{n}.$$

672. $\angle C = 90^\circ$ $\angle ACB$ — вписанный и равен 90°,



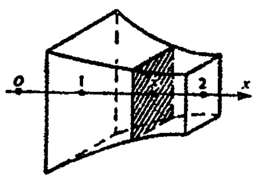
тогда, AB — диаметр. $AB = 2r = \dfrac{a}{\cos\alpha}$, $r = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$,

r — радиус основания цилиндра.

Высота призмы равна высоте цилиндра, значит,

$$V_{цил} = \pi r^2 h = \pi\cdot\frac{a^2}{4\cos^2\alpha}\cdot h = \frac{\pi a^2 h}{4\cos^2\alpha}.$$

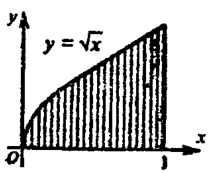
673. Имеем $V = \int\limits_a^b S(x)dx$, где $a = 1$; $b = 2$



$$S(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^{-2}$$

$$V = \int\limits_1^2 x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}\Bigg|_1^2 = -\frac{1}{x}\Bigg|_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

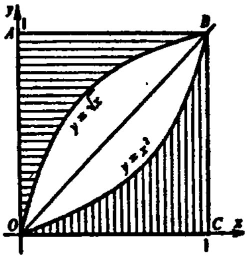
674. Имеем $V = \int\limits_a^b S(x)dx$, где $a = 0$; $b = 1$



Площадь сечения: $S(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$.

$$V = \int\limits_0^1 \pi x\,dx = \pi\int\limits_0^1 x\,dx = \pi\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \pi\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

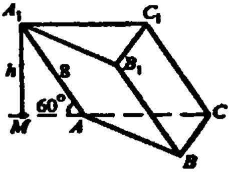
675. Заштрихованные фигуры симметричны относительно биссектрисы OB. Следовательно, объем тела, которое получается вращением фигуры OAB вокруг оси Oy, и тела, полученного вращением равновеликой фигуры OBC вокруг оси Ox равны.



Имеем $V=\int_a^b S(x)dx$, где $a=0$; $b=1$. $S(x)=(x^2)^2\pi=x^4\pi$.

$$V=\int_0^1 \pi x^4\,dx=\pi\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{5}.$$

676. Построим из точки A_1 перпендикуляр A_1M к плоскости ΔABC. Следовательно, $\angle A_1AM=60°$.



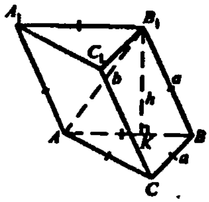
Из ΔA_1AM: $A_1M=h=8\sin 60°=\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ см.

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-10)(p-10)(p-12)},$$

$$p=\frac{10+10+12}{2}=\frac{32}{2}=16 \text{ см},\ S_{\Delta ABC}=\sqrt{16\cdot 6\cdot 6\cdot 4}=4\cdot 6\cdot 2=48 \text{ см}^2.$$

$$V=S_{\Delta ABC}h=48\cdot 4\sqrt{3}=192\sqrt{3} \text{ см}^3.$$

677. $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. По условию задачи плоскость $ABB_1A_1 \perp$ плоскости ABC.



Построим $B_1K\perp AB$. $B_1K=h$ — высота призмы.

Из ΔAB_1K: $AK=\sqrt{b^2-h^2}$. Из ΔB_1KB: $KB=\sqrt{a^2-h^2}$.

Получим уравнение: $AK+KB=AB=a$.

$$\sqrt{b^2-h^2}+\sqrt{a^2-h^2}=a;$$

$$b^2-h^2+a^2-h^2+2\sqrt{(b^2-h^2)(a^2-h^2)}=a^2,$$

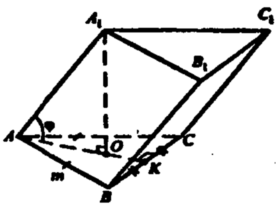
$$2\sqrt{(b^2-h^2)(a^2-h^2)}=2h^2-b^2.\ 2h^2-b^2\geq 0;\ h^2\geq\frac{b^2}{2};$$

$$h\geq\frac{b}{\sqrt{2}},\ 4(b^2a^2-b^2h^2-a^2h^2+h^4)=4h^4+b^4-4h^2b^2;\ 4b^2a^2-b^4=4a^2h^2,$$

$$h^2=\frac{b^2(4a^2-b^2)}{4a^2};\ h=\frac{b}{2a}\sqrt{4a^2-b^2};$$

$$V=S_{\Delta ABC}h=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{2a}=\frac{ab}{8}\sqrt{12a^2-3b^2}.$$

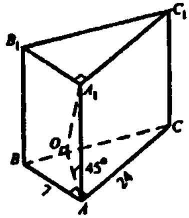
678. Построим $A_1O\perp$ плоскости ABC, точка O — центр правильного ΔABC. Отрезок OA — радиус описанной около ΔABC окружности.



По теореме синусов: $\frac{BC}{\sin\angle A}=2R=2AO$, отсюда $AO = R = \dfrac{m}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{m}{2\sqrt{3}/2} = \dfrac{m}{\sqrt{3}}$.

Из прямоугольного ΔA_1OA найдем высоту призмы $A_1O = R\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{m}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{tg}\varphi$.

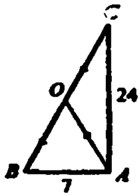
$$S_{\Delta ABC} = \frac{m^2\sqrt{3}}{4}.\ V = S_{\Delta ABC}A_1O = \frac{m\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}}\cdot\frac{m^2\sqrt{3}}{4} = \frac{m^3\operatorname{tg}\varphi}{4}.$$



679. Наклонные A_1B, A_1A, A_1C равны по условию. Т.к. A_1 равноудалена от A, B и C, то проекция точки A_1 на плоскость ABC — это точка O, которая является центром описанной около ΔABC окружности. Тогда, точка O — середина гипотенузы BC, $A_1O \perp BC$. A_1O — высота призмы.

ΔA_1OA — равнобедренный прямоугольный, $A_1O = AO$.

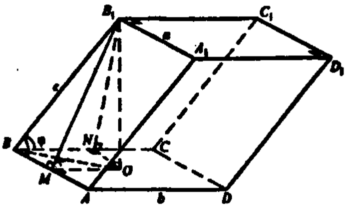
$BC = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$ см.



$OC = OB = OA = \dfrac{25}{2}$ см. Высота призмы $OA_1 = \dfrac{25}{2}$ см.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB\cdot AC = \dfrac{7\cdot 24}{2} = 84$ см^2. $V = S_{\Delta ABC}\,OA_1 = 84\cdot\dfrac{25}{2} =$

$= 42\cdot 25 = 1050$ см^3.



680. Построим $B_1M \perp BA$ и $B_1N \perp BC$.

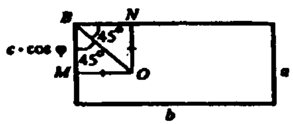
$\Delta B_1BM = \Delta B_1BN$ (по гипотенузе и острому углу). Значит, $B_1M = B_1N$.

Построим $B_1O \perp$ плоскости ABC, отрезки ON и OM. Из равенства наклонных B_1M и B_1N следует равенство их проекций, $OM = ON$, то есть точка O лежит на биссектрисе угла ABC.

Из ΔB_1BM: $BM = c\cos\varphi$, $BO = BM\sqrt{2} = c\sqrt{2}\cos\varphi$.

Из прямоугольного ΔB_1BO:

$B_1O = \sqrt{BB_1^2 - BO^2} = \sqrt{c^2 - c^2 2\cos^2\varphi} = c\sqrt{1 - 2\cos^2\varphi} = c\sqrt{-\cos 2\varphi}$.

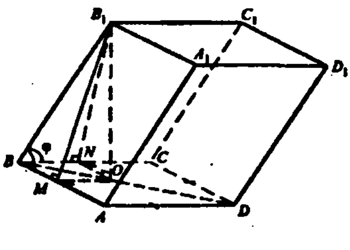


B_1O — высота параллелепипеда.

$S_{ABCD} = ab$;

$V = S_{ABCD}\cdot B_1O = abc\sqrt{-\cos 2\varphi}$

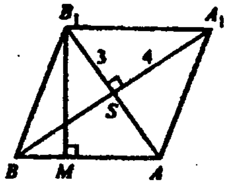
($2\varphi > 90°$, $\cos 2\varphi < 0$; $-\cos 2\varphi > 0$).



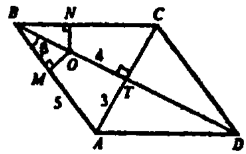
681. $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BD = \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 = 24$ см^2.

Вычислим высоту параллелепипеда. Боковое ребро BB_1 составляет со смежными сторонами основания равные углы; обозначим $\angle B_1BA = \angle B_1BC = \alpha$.

Проведем $B_1M \perp BA$ и $B_1N \perp BC$. $\Delta B_1BM = \Delta B_1BN$ (по гипотенузе и острому углу). Тогда, $B_1M = B_1N$. Проведем $B_1O \perp$ плоскости $ABCD$, отрезки ON и OM. $ON = OM$ (как проекции равных отрезков). Точка O равноудалена от сторон ромба BC и BA, то есть она лежит на биссектрисе угла ABC, а в ромбе биссектрисой угла служит диагональ ромба, значит, точка O лежит на диагонали ромба DB. B_1O — высота параллелепипеда.



По свойству диагоналей ромба $\angle ASB = 90^\circ$ и $B_1S = 3$, $A_1S = 4$. Следовательно, сторона ромба $B_1A_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ см.



$S_{BB_1A_1A} = BA \cdot B_1M = 24$; $5 \cdot B_1M = 24$; $B_1M = \dfrac{24}{5}$ см.

Из прямоугольного треугольника ΔB_1MB:

$$BM = \sqrt{BB_1^2 - B_1M^2} = \sqrt{5^2 - (\frac{24}{5})^2} = \sqrt{\frac{625 - 576}{25}} = \frac{7}{5} \text{ см}$$

Из $\Delta ABT \cdot \cos\beta = \dfrac{4}{5}$

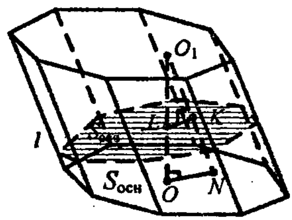
Из ΔMOB: $BO = BM \cdot \dfrac{1}{\cos\beta} = \dfrac{7}{5} \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{7}{4}$ см.

Из прямоугольного треугольника ΔB_1OB:

$$B_1O = \sqrt{BB_1^2 - BO^2} = \sqrt{5^2 - \frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 16 - 49}{16}} = \frac{\sqrt{351}}{4} = \frac{3}{4}\sqrt{39} = \text{см.}$$

$$V = S_{ABCD} \cdot B_1O = 24 \cdot \frac{3\sqrt{39}}{4} = 18\sqrt{39} \text{ см}^3.$$

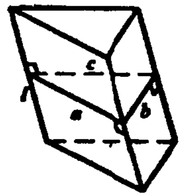
682. Пусть α и β — плоскости оснований призмы. Проведем плоскость γ, перпендикулярно боковым ребрам призмы. Далее, осуществим параллельный перенос фигуры, ограниченной плоскостями β, γ и боковыми ребрами призмы так, чтобы плоскость α совместилась с плоскостью β. Получим прямую призму, боковая сторона которой равна боковой стороне исходной призмы, а основание является сечением исходной призмы плоскостью, перпендикулярной боковым ребрам.



По свойствам аддитивности объема $V_1 = V_2$, где V_1 и V_2 соответственно объемы исходной и полученной призмы. $V_2 = Sl$, где S — площадь основания, что и требовалось доказать.

683. Обозначим l — длина бокового ребра призмы, а расстояние между боковыми ребрами равны a, b, c.

По замечанию в п. 68 объем призмы можно вычислить по формуле $V = S_{\perp}l$, где $S_{\perp}$ — площадь перпендикулярного (к боковым ребрам) сечения призмы. Треугольник, составленный из отрезков a, b и c, является перпендикулярным сечением.



$S_{\perp} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

где $p = \dfrac{37+13+30}{2} = \dfrac{80}{2} = 40$ см.

$S_{\perp} = \sqrt{40(40-37)(40-13)(40-30)} = \sqrt{40\cdot 3\cdot 27\cdot 10} = 20\cdot 9 = 180$ см^2

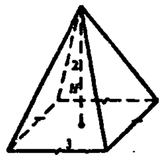
$S_{бок} = la + lb + lc = 480$ см^2

$l(a+b+c) = 480$

$l = \dfrac{480}{a+b+c} = \dfrac{480}{80} = 6$

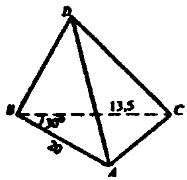
$V = S_{\perp}l = 180\cdot 6 = 1080$ см^3.

684. а) $S_{осн} = 3^2 = 9$ м^2;



$V = \dfrac{1}{3}S_{осн}H = \dfrac{1}{3}\cdot 9\cdot 2 = 6$ м^3;

б) $h = 2{,}2$ м $= 220$ см.



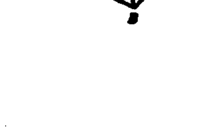
$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BA\cdot BC\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}20\cdot 13{,}5\dfrac{1}{2} = 67{,}5$ см^2,

$V = \dfrac{1}{3}S_{осн}h = \dfrac{1}{3}\cdot 67{,}5\cdot 220 = 22{,}5\cdot 220 = 4950$ см^3

685. $h = 12$ см, $x = 13$ см.

$S_{осн} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{13^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{169\sqrt{3}}{4}$, $V = \dfrac{1}{3}S_{осн}h = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{169\sqrt{3}}{4}\cdot 12 = 169\sqrt{3}$ см^3

686. а) DO — высота пирамиды.



Из прямоугольного треугольника ΔADO: $DO = H = l\sin\varphi$.

Точка O — центр ΔABC, OA — радиус описанной около ΔABC окружности.

По теореме синусов: $\dfrac{BC}{\sin 60^\circ} = 2OA$, $OA = l\cos\varphi$.

$BC = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}l\cdot\cos\varphi = \sqrt{3}\,l\cos\varphi$.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(\sqrt{3})^2l^2\cos^2\varphi\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}l^2\cos^2\varphi$.

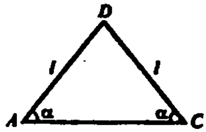
$V = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}H = \dfrac{1}{3}\dfrac{3\sqrt{3}l^2\cos^2\varphi}{4}l\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{4}l^3\sin\varphi\cos^2\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{8}l^3\sin 2\varphi\cos\varphi$.

б) ΔADC — равнобедренный. $\angle D = 180^\circ - 2\alpha$.

По теореме косинусов имеем:

$AC^2 = l^2 + l^2 - 2l^2\cos(180^\circ - 2\alpha) = 2l^2(1 + \cos 2\alpha) = 2l^2(1 + 2\cos^2\alpha - 1) = 4l^2\cos^2\alpha$

$AC = \sqrt{4l^2\cos^2\alpha} = 2l|\cos\alpha| = 2l\cos\alpha$;



$$S_{\Delta ABC} = \frac{AC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2l\cos\alpha)^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\,l^2\cos^2\alpha.$$

Вычислим длину отрезка OA, $OA = R$, где R — радиус окружности, описанной около ΔABC. $\dfrac{AC}{\sin 60^\circ} = 2AO$;

$$OA = \frac{AC}{2\sqrt{3}/2} = \frac{AC}{\sqrt{3}} = \frac{2l\cos\alpha}{\sqrt{3}}.$$

Из ΔADO: $DO = H = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{l^2 - \dfrac{4l^2\cos^2\alpha}{3}} = \dfrac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\cos^2\alpha}$

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}H = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,l^2\cos^2\alpha\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\cos^2\alpha} = \frac{1}{3}l^3\cos^2\alpha\sqrt{3 - 4\cos^2\alpha},$$

в) ΔBDC — равнобедренный. По теореме косинусов:

$$BC^2 = l^2 + l^2 - 2l^2\cdot\cos\beta = 2l^2(1 - \cos\beta) = 2l^2 2\sin^2\frac{\beta}{2};$$

$$BC = \sqrt{4l^2\sin^2\frac{\beta}{2}} = 2l\sin\frac{\beta}{2}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4l^2\sin^2\frac{\beta}{2}\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\,l^2\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

В треугольнике ΔABC: OA — радиус описанной окружности·

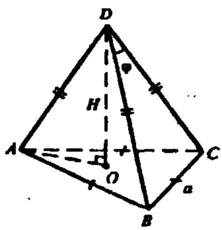
$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2OA;\ OA = \frac{BC}{2\sqrt{3}/2} = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{2l\sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt{3}}.$$

Из прямоугольного ΔAOD:

$$H = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{l^2 - \frac{4l^2\sin^2\frac{\beta}{2}}{3}} = \sqrt{\frac{3l^2 - 4l^2\sin^2\frac{\beta}{2}}{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\beta}{2}}.$$

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}H = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,l^2\sin^2\cdot\frac{\beta}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\beta}{2}} = \frac{1}{3}l^3\sin^2\frac{\beta}{2}\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\beta}{2}}.$$

687. Из треугольника ΔBCD найдем боковое ребро. Обозначим $DB = DC = DA = d$. По теореме косинусов:



$$a^2 = d^2 + d^2 - 2d^2\cdot\cos\varphi = 2d^2(1 - \cos\varphi) = 2d^2 2\sin^2\frac{\varphi}{2};$$

$$a = 2d\sin\frac{\varphi}{2};\ d = \frac{a}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$$

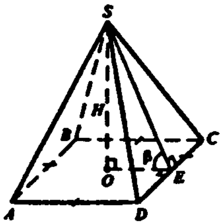
Построим $DO \perp$ плоскости ABC. $DO = H = \sqrt{d^2 - OA^2}$, OA — радиус окружности, описанной около ΔABC.

По теореме синусов имеем: $\frac{a}{\sin 60°} = 2OA$; $OA = \frac{a}{2\sin 60°} = \frac{a}{\sqrt3}$

$$H = \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{a^2}{3}} = a\frac{\sqrt{3 - 4\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt3}.\ V = \frac13 S_{\Delta ABC}H.\ S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt3}{4},$$

поэтому

$$V = \frac13\cdot\frac{a^2\sqrt3}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3-4\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{2\sqrt3\sin\frac{\varphi}{2}\cdot} = \frac{a^3\sqrt{3-4\sin^2\frac{\varphi}{2}}}{24\sin\frac{\varphi}{2}}.$$



688. Пусть O — точка пересечения диагоналей. Построим $OE \perp DC$. По теореме о трех перпендикулярах $SE \perp DC$. Таким образом, $\angle OES = \beta$ — линейный угол двугранного угла при основании.

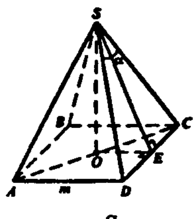
а) $OE = \frac{H}{tg\beta} = H\,\text{ctg}\,\beta$, $AD = 2OE = 2H\,\text{ctg}\,\beta$.

$S_{ABCD} = AD^2 = 4H^2\text{ctg}^2\beta$. $V = \frac13 S_{ABCD}H = \frac13\cdot 4H^2\,\text{ctg}^2\beta\, H = \frac43\cdot H^3\,\text{ctg}^2\beta$

б) SO — высота пирамиды. Проведем OE перпендикулярно DC, отрезок SE. По теореме о трех перпендикулярах SE перпендикулярно DC.

В правильной пирамиде боковые ребра равны, ΔDSC — равнобедренный, высота SE — биссектриса и медиана.

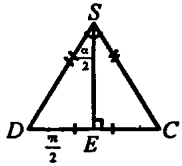
Из треугольника ΔDSE: $\frac{m}{2}\cdot\frac{1}{SE} = \text{tg}\frac{\alpha}{2}$, $SE = \frac{m}{2tg\frac{\alpha}{2}}$.



Из треугольника ΔSOE:

$$SO = H = \sqrt{SE^2 - OE^2} = \sqrt{\frac{m^2}{4tg^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{m^2}{4}} = \sqrt{\frac{m^2}{4}\left(\frac{1}{tg^2\frac{\alpha}{2}} - 1\right)} =$$

$$= \frac{m}{2}\sqrt{\text{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos\alpha}.$$



Площадь $S_{ABCD} = m^2$. $V = \frac13 S_{ABCD}H = \frac13 m^2\frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos\alpha} = \frac{m^3}{6\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos\alpha}$.

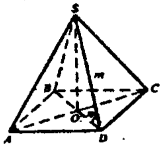
689. SO перпендикулярна плоскости $ABCD$, SO — высота пирамиды. В правильной пирамиде все боковые ребра равны. OD — проекция SD на плоскость основания, $\angle SDO = \varphi$.

Из ΔSOD: $SO = m\sin\varphi$; $OD = m\cos\varphi$; $BO = OD$, $BD = 2m\cos\varphi$.

Обозначим сторону основания за x.

Следовательно, $x\sqrt{2} = 2m\cos\varphi$; $x = \sqrt{2}\, m^2\cos^2\varphi$.

$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}SO = \frac{1}{3}2m^2\cos^2\varphi m\sin\varphi = \frac{2}{3}m^3\cos^2\varphi\ \sin\varphi$.

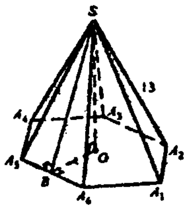


690. Построим $OB \perp A_5A_6$. По теореме о трех перпендикулярах $SB \perp A_5A_6$. $OB = r$, r — радиус вписанной в основание окружности; $r = 6 : 2 = 3$ (см). Обозначим x — сторона основания.

Как известно, $r = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$, отсюда $x = \frac{2r}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ см.

$S_{\Delta A_5OA_6} = \frac{1}{2}\cdot A_5A_6\cdot OB = \frac{1}{2}xr = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3 = 3\sqrt{3}$ см^2

$S_{осн} = 6S_{\Delta A_5OA_6} = 6\cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ см^2.



Вычислим высоту пирамиды из ΔSOB.

$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{SB^2 - r^2} = \sqrt{SB^2 - 9^2}$.

Из равнобедренного ΔSA_5A_6 найдем SB. (Т.к. SB — высота в равнобедренном треугольнике, то она является медианой, $A_5B = BA_6 = \frac{1}{2}x = \sqrt{3}$ см.)

$SB = \sqrt{SA_6^2 - BA_6^2} = \sqrt{13^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{169-3} = \sqrt{166}$ см.

Из ΔSBO: $SO = 166 - 9 = \sqrt{157}$ см.

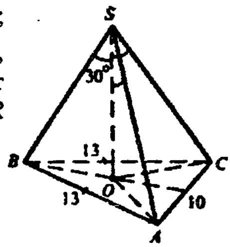
$V = \frac{1}{3}S_{осн}SO = \frac{1}{3}\cdot 18\frac{b}{2}\cdot\sqrt{157} = 6\sqrt{471}$ см^3

Найдем площадь боковой поверхности. $S_{бок} = 6S_{\Delta A_5OA_6}$,

$S_{\Delta A_5OA_6} = \frac{1}{2}\cdot A_5A_6\cdot SB = \frac{1}{2}xSB = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{166} = \sqrt{3\cdot 166} = \sqrt{498}$ см^2

$S_{бок} = 6\sqrt{498}$ см^2.

691. Построим SO перпендикулярно плоскости ABC; SO — это высота пирамиды. $\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC$, они прямоугольные, SO — общий катет, они имеют равный острый угол. Тогда, $OB = OC = OA = R$, где R — радиус описанной окружности.



$\frac{AC}{\sin\angle B} = 2R$; $R = \frac{AC}{2\sin\angle B} = \frac{10}{2\sin\angle B} = \frac{5}{\sin\angle B}$

По теореме косинусов в треугольнике ΔABC:

$10^2 = 13^2 + 13^2 - 2\cdot 13\cdot 13\cdot\cos\angle B$, $100 = 2\cdot 13^2 - 2\cdot 13^2\cdot\cos\angle B$;

$2\cdot 169\cdot\cos\angle B = 338 - 100;\ \cos\angle B = \dfrac{238}{2\cdot 169} = \dfrac{119}{169}$

$\sin\angle B = \sqrt{1-\cos^2\angle B} = \sqrt{1-\dfrac{119^2}{169^2}} = \dfrac{1}{169}\sqrt{14400} = \dfrac{120}{169}$.

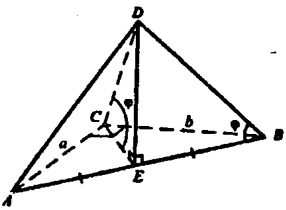
Значит, $R = OB = \dfrac{5\cdot 169}{120} = \dfrac{169}{24}$.

Из треугольника ΔSOB найдем высоту SO: $SO = \dfrac{R}{tg30^\circ} = R\sqrt{3} = \dfrac{169}{24}\sqrt{3}$.

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-10)(p-13)(p-13)}$, где $p = \dfrac{10+13+13}{2} = \dfrac{36}{2} = 18$ см.

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{18\cdot 8\cdot 5\cdot 5} = \sqrt{25\cdot 9\cdot 2\cdot 8} = 5\cdot 3\cdot 4 = 60$ см^2.

$V = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot SO = \dfrac{1}{3}\cdot 60\cdot\dfrac{169\sqrt{3}}{24} = \dfrac{169\sqrt{3}\cdot 5}{3\cdot 2} = \dfrac{845\sqrt{3}}{6}$ см^3

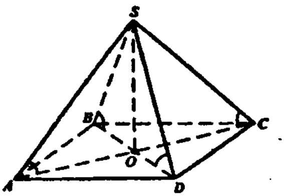


692. Построим высоту пирамиды DE. Т.к. все ребра одинаково наклонены к плоскости основания, то $\Delta DEA = \Delta DEB = \Delta DEC$. Поэтому $EA = EB = EC = R$, R — радиус описанной окружности. Значит, точка E — это середина гипотенузы AB, плоскость $ADB \perp$ плоскости ABC.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}ab;\ AB = \sqrt{a^2+b^2},\ BE = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

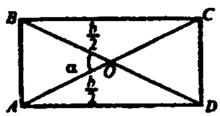
$\dfrac{DE}{BE} = \operatorname{tg}\varphi,\ DE = BE\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\operatorname{tg}\varphi}{2}$

$V = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot DE = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}ab\cdot\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{ab}{12}\cdot\operatorname{tg}\varphi\cdot\sqrt{a^2+b^2}$



693 (с). SO — высота пирамиды. $\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC = \Delta SOD$. Тогда $OA = OB = OC = OD$ и высота проектируется в точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$

$OC = BO = OA = \dfrac{b}{2}$ (по свойству диагоналей прямоугольника).



$S_{\Delta AOB} = \dfrac{1}{2}\cdot OB\cdot OA\cdot\sin\alpha.$

$S_{\Delta BOC} = \dfrac{1}{2}BO\cdot OC\sin(180^\circ-\alpha) = \dfrac{1}{2}OB\cdot OC\sin\alpha.$

$S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} = 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot OB\cdot OA\cdot\sin\alpha = OB\cdot OA\cdot\sin\alpha = \dfrac{b^2}{4}\cdot\sin\alpha$

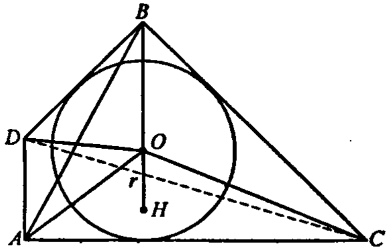
$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{b^2 \sin\alpha}{2}$

Обозначим $\angle OAS = \beta$, следовательно, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{SO}{AO} = \dfrac{SO}{b/2} = \dfrac{2}{b}SO$

$V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}SO$; $V = \dfrac{1}{3}\dfrac{b^2\sin\alpha}{2}SO$, $SO = \dfrac{6V}{b^2\sin\alpha}$,

$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{2}{b}\cdot\dfrac{6V}{b^2\sin\alpha} = \dfrac{12V}{b^3\sin\alpha}$; $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{12V}{b^3\sin\alpha}$.

693 (н).



Пусть O – центр вписанной сферы.

$V_{ABCD} = V_{ODAC} + V_{OADB} + V_{ODBC} + V_{OABC}$.

$V_{ODAC} = \dfrac{1}{3}rS_{DAC}$ (т.к. высота $OH = r$).

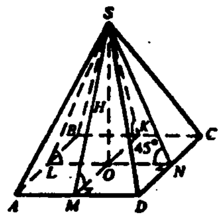
$V_{OADB} = \dfrac{1}{3}rS_{ADB}$; $V_{ODBC} = \dfrac{1}{3}rS_{DBC}$;

$V_{OABC} = \dfrac{1}{3}rS_{ABC}$

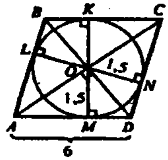
$V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}r\left(S_{DAC} + S_{ADB} + S_{DBC} + S_{ABC}\right) = \dfrac{1}{3}rS$

S – площадь полной поверхности пирамиды.

694. Построим линейные углы двугранных углов при основании и высоту пирамиды SO; $ON \perp DC$, $OK \perp BC$, $OL \perp AB$ и $OM \perp AD$.



По теореме о трех перпендикулярах $SN \perp DC$, $SK \perp BC$, $SL \perp AB$, $SM \perp AD$. $\Delta SOM = \Delta SON = \Delta SOK = \Delta SOL$ (по катету и острому углу). Следовательно, $OM = ON = OK = OL = r$, r — радиус вписанной в основание окружности.



Треугольник ΔSON — равнобедренный, $SO = ON = 1{,}5$ см.

$S_{ABCD} = AD \cdot MK = 6(1{,}5\cdot 2) = 6\cdot 3 = 18$ (см^2).

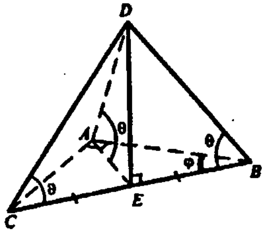
$V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}SO = \dfrac{1}{3}\cdot 18\cdot 1{,}5 = 6\cdot 1{,}5 = 9$ (см^2).

695. а) Построим высоту DE, отрезки EA, EB, EC.

$\Delta DEA = \Delta DEB = \Delta DEC$. Тогда $EA = EB = EC = R$, R — радиус окружности, описанной около ΔABC. Значит, точка E является серединой BC, плоскость $CDB \perp$ плоскости ABC; $CE = EB = \dfrac{c}{2}$.

Из треугольника DEB: $\dfrac{DE}{EB} = \operatorname{tg}\theta$, $DE = \dfrac{c}{2}\cdot\operatorname{tg}\theta$.

В треугольнике ABC: $AC = c\ \sin\varphi$, $AB = c\ \cos\varphi$;

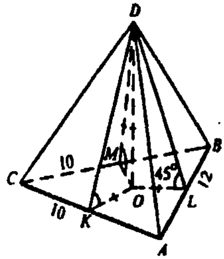


$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot AB = \frac{1}{2}c^2 \sin\varphi\ \cos\varphi .$$

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}DE = \frac{1}{3}\frac{1}{2}c^2 \sin\varphi \cos\varphi \frac{c}{2}\operatorname{tg}\theta = \frac{c^3 tg\theta \sin 2\varphi}{24}.$$

б) Проведем $OL \perp AB$, $OK \perp CA$, $OM \perp CB$.

По теореме о трех перпендикулярах имеем $DL \perp AB$, $DM \perp CB$, $DK \perp CA$. $\Delta DOL = \Delta DOK = \Delta DOM$. Тогда, $OM = OK = OL = r$, r — радиус вписанной в ΔABC окружности. $r = \dfrac{S}{p}$, $p = \dfrac{10+10+12}{2} = 16$ см.

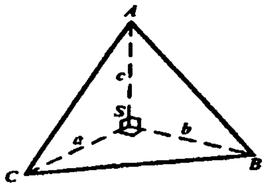


$$S = \sqrt{p(p-10)(p-10)(p-12)} = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 48 \text{ см}^2.$$

$a = r = \dfrac{48}{16} = 3$ (см). Из ΔDOL: $DO = OL = 3$ см.

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 3 = 48 \text{ см}^3.$$

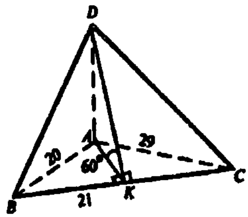
в) $AS \perp SC$, $AS \perp SB$



AS перпендикулярна плоскости BSC, AS — высота пирамиды.

$S_{\Delta CSB} = \dfrac{1}{2}ab$. $V = \dfrac{1}{3}S_{\Delta CSB}AS = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}abc = \dfrac{abc}{6}$.

696. DA — высота пирамиды.



Построим $AK \perp BC$, отрезок DK. По теореме о трех перпендикулярах $DK \perp BC$, $\angle AKD = 60°$ — линейный угол двугранного угла $DBCA$.

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}$$

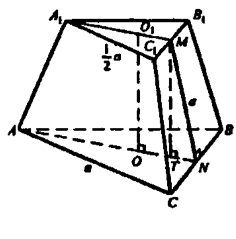
$\Delta\ ABC$ — прямоугольный по теореме Пифагора

$(20^2 + 21^2 = 29^2)$. $\Rightarrow ABC = \dfrac{20 \cdot 21}{2} = 210$ (см^2) и точка K совпадает с B

С другой стороны, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BC \cdot AK = 210$, $AK = \dfrac{1}{2} = 20$ (см).

Из ΔDAB: $\dfrac{DA}{AB} = \operatorname{tg}60° = \sqrt{3}$, $DA = 20\sqrt{3}$ (см).

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}DA = \frac{210 \cdot 20\sqrt{3}}{3} = 70 \cdot 20\sqrt{3} = 1400\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{)}.$$



697. $V = \dfrac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{SS_1}\ )$,

где $h = O_1O$, $S = S_{\Delta ABC}$, $S_1 = S_{\Delta A_1B_1C_1}$.

Проведем MT перпендикулярно AN

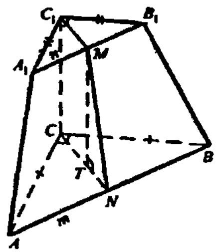
$TN = ON - O_1M \quad ON = \dfrac{BC}{2\sqrt{3}},\ O_1M = \dfrac{B_1C_1}{2\sqrt{3}}$

$$ON = \frac{a}{2\sqrt{3}},\ O_1M = \frac{a}{2\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{a}{4\sqrt{3}},\ TN = \frac{a}{2\sqrt{3}} - \frac{a}{4\sqrt{3}} = \frac{a}{4\sqrt{3}}.$$

Из ΔMTN: $MT = O_1O = \sqrt{MN^2 - TN^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{48}} = \dfrac{a}{4}\sqrt{\dfrac{47}{3}}.$

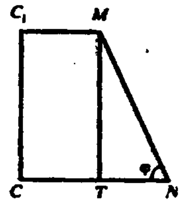
$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};\ S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a}{4}\frac{\sqrt{47}}{\sqrt{3}}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{16} + \sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{16}}\right) = \frac{a^3\sqrt{47}\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 4\cdot 4} = \frac{7\sqrt{47}a^3}{192}.$$



698. Построим $C_1M \perp A_1B_1$ и $CN \perp AB$, отрезок MN. Т.к. $AB \perp CN$ и $AB \perp C_1C$, то плоскость $C_1CNM \perp AB$, $MN \perp AB$, MN — апофема. Проведем $MT \perp CN$, MT — высота пирамиды. $\angle MNT = \varphi$ — линейный угол двугранного угла $MABC$.

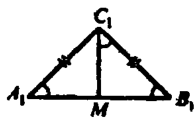
$$C_1M = MB_1 = \frac{n}{\sqrt{2}};\ CN = NB = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$



$$TN = CN - C_1M = \frac{m}{\sqrt{2}} - \frac{n}{\sqrt{2}} = \frac{m-n}{\sqrt{2}}.$$

В ΔMTN: $\dfrac{MT}{TN} = \operatorname{tg}\varphi$, $MT = TN\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{m-n}{2}\operatorname{tg}\varphi$

$$AB = AC\sqrt{2},\ m = AC\sqrt{2}.\ AC = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

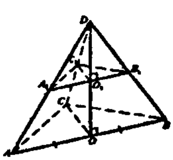


$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{2} = \frac{m^4}{4}.\ S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{n^2}{4}.$$

$$V = \frac{1}{3}MT\,(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A_1B_1C_1} + \sqrt{S_{\Delta ABC}\cdot S_{\Delta A_1B_1C_1}});$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{m-n}{2}\operatorname{tg}\varphi\left(\frac{m^4}{4} + \frac{n^2}{4} + \sqrt{\frac{m^2\cdot n^2}{4\cdot 4}}\right) = \frac{m-n}{6}\operatorname{tg}\varphi\left(\frac{m^2+n^2}{4} + \frac{mn}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{24}\cdot\operatorname{tg}\varphi\ (m-n)(m^2+mn+n^2) = \frac{(m^3-n^3)}{24}\cdot\operatorname{tg}\varphi.$$



699. Построим высоту пирамиды DO. $\Delta DOA = \Delta DOB = \Delta DOC$ (по гипотенузе и катету). Тогда, $OA = OB = OC$. Точка О равноудалена от вершин ΔABC, таким образом, является центром описанной около ΔABC окружности. В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности — это середина гипотенузы

$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ (т.к плоскости $A_1B_1C_1$ и ABC параллельны по условию, ким образом, $A_1B_1 \| AB$, $B_1C_1 \| BC$, $A_1C_1 \| AC$), поэтому $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$

$\Delta DO_1B_1 \sim \Delta DOB$ — имеют общий острый угол при D, $\frac{DO_1}{DO} = \frac{O_1B_1}{OB} = \frac{DB_1}{DB}$

$\Delta DA_1B_1 \sim \Delta DAB$, $\frac{DA_1}{DA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{DB_1}{DB} = \frac{\frac{1}{2}DB}{DB} = \frac{1}{2}$.

Таким образом, $\frac{DO_1}{DO} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{1}{2}$.

Площади подобных фигур относятся как квадраты сходственных сторон, поэтому $\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{A_1B_1}{AB}\right) = \frac{1}{4}$. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 18 = 216$ дм^2

$S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} = \frac{216}{4} = 54$ дм^2.

Вычислим высоту усеченной пирамиды O_1O.

$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{24^2 + 18^2} = \sqrt{576 + 324} = \sqrt{900} = 30$ дм.

ΔADB — равнобедренный, $DA = DB = 25$ дм.

Из треугольника ΔDOB: $DO = \sqrt{DB^2 + OB^2} = \sqrt{25^2 + 15^2} = \sqrt{400} = 20$ дм;

$O_1O = \frac{1}{2} DO = 10$ дм. $V = \frac{1}{3} O_1O(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A_1B_1C_1} + \sqrt{S_{\Delta ABC} S_{\Delta A_1B_1C_1}}$);

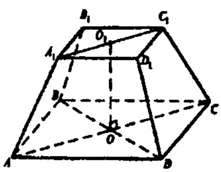
$V = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot (216 + 54 + \sqrt{216 \cdot 54}) = \frac{10}{3}(270 + \sqrt{27 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 27 \cdot 2}) =$

$= \frac{10}{3}(270 + 27 \cdot 4) = \frac{10}{3}(270 + 108) = 10 \cdot 126 = 1260$ дм^2

700. $A_1D_1 = 4$ см, $AD = 6$ см, $S_{\Delta AA_1C_1C} = 15$ см^2. $S_{ABCD} = AD^2 = 6^2 = 36$ (см^2); $S_{\Delta A_1B_1C_1D_1} = A_1D_1{}^2 = 4^2 = 16$ (см^2). O_1O — высота пирамиды.

$A_1C_1 \| AC$, поэтому сечение AA_1C_1C —равнобедренная трапеция.

$S_{\Delta AA_1C_1C} = 15 = \frac{A_1C_1 + AC}{2} O_1O$, где O_1O — высота пирамиды и высота сечения. $A_1C_1 = 4\sqrt{2}$; $AC = 6\sqrt{2}$.



$15 = \frac{4\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{2} O_1O$, $O_1O = \frac{15}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$V = \frac{1}{3} O_1O(S_{ABCD} + S_{\Delta A_1B_1C_1D_1} + \sqrt{S_{\Delta ABC} S_{\Delta A_1B_1C_1}}$);

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}(36 + 16 + \sqrt{36 \cdot 16}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(52 + 24) = \frac{76}{\sqrt{2}} = \frac{76\sqrt{2}}{2} = 38\sqrt{2}$ см^2

701. а) Дано $h = 3$ см, $r = 1{,}5$ см. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}25 \cdot 3 = 2{,}25\pi$ (см^3);

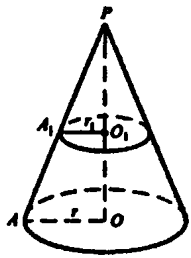
б) Дано $r = 4$ см, $V = 48\pi$ см^3. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $h = \frac{3V}{\pi r^2} = \frac{3 \cdot 48\pi}{\pi \cdot 16} = 9$ (см);

в) Дано $h = m$, $V = p$. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $p = \frac{1}{3}\pi r^2 m$, $r^2 = \frac{3p}{\pi m}$, $r = \sqrt{\frac{3p}{\pi m}}$.

702. $PO = 5$ см, $PO_1 = 2$ см; PO — высота конуса.

$\Delta PO_1A_1 \sim \Delta POA$, $O_1A_1 = r_1$,

Тогда $\frac{PO_1}{A_1O} = \frac{PO}{OA}$, $\frac{2}{r_1} = \frac{5}{OA} = \frac{5}{r}$.

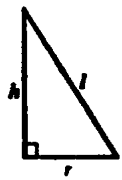


$V = \frac{1}{3}\pi r_1^2\, PO_1 = 24$, $\frac{1}{3}\pi r_1^2 \cdot 2 = 24$, $r_1^2 = \frac{36}{\pi}$,

$r = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$ см. $\frac{2}{\frac{6}{\sqrt{\pi}}} = \frac{5}{r}$, откуда $r = \frac{6 \cdot 5}{\sqrt{\pi} \cdot 2} = \frac{15}{\sqrt{\pi}}$ см.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2\, PO = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{225}{\pi} \cdot 5 = 75 \cdot 5 = 375$ см^3.

703. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, где r — радиус основания, h — высота конуса.



$\pi r^2 = Q$, откуда $r^2 = \frac{Q}{\pi}$ $S_{бок} = P = \pi r l$, где l — образующая.

$h = \sqrt{l^2 - r^2}$ $P = \pi\sqrt{\frac{Q}{\pi}} \cdot l$, $l = \frac{P}{\sqrt{\pi Q}}$.

$$h = \sqrt{\left(\frac{P}{\sqrt{\pi Q}}\right)^2 - \frac{Q}{\pi}} = \sqrt{\frac{P^2}{\pi Q} - \frac{Q}{\pi}} = \sqrt{\frac{P^2 - Q^2}{\pi Q}}.$$

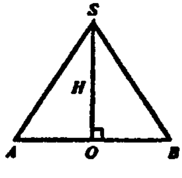
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} Q \cdot \frac{\sqrt{P^2 - Q^2}}{\sqrt{\pi Q}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{Q}{\pi}(P^2 - Q^2)} = \frac{\sqrt{\pi Q(P^2 - Q^2)}}{3\pi}.$$

704. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{H^2}{4} \cdot H = \frac{\pi H^3}{12}$.

705. Обозначим образующую $SB = d$, радиус основания $OB = r$. Из треугольника ΔSOB: $SO = H = \sqrt{d^2 - r^2} = \sqrt{13^2 - r^2} = \sqrt{169 - r^2}$,

тогда $S_{\Delta ASB} = 60 = \frac{1}{2} H \cdot AB = \frac{Hr \cdot 2}{2} = H \cdot r$.

Осевое сечение конуса



$$\begin{cases} H = \sqrt{169 - r^2}, \\ Hr = 60. \end{cases}$$

$H = 60 \cdot \frac{1}{r}$, $\frac{60}{r} = \sqrt{169 - r^2}$, $r^4 - 169r^2 + 3600 = 0$.

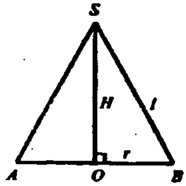
$$(r^2)_{1,2} = \frac{169 \pm \sqrt{28561 - 14400}}{2} = \frac{169 \pm 119}{2},$$

$$r^2 = \frac{288}{2} = 144,\ r = 12 \text{ см},\ r^2 = \frac{169 - 119}{2} = 25,\ r = 5 \text{ см}.$$

при $r_1 = 12$ см $H_1 = \frac{60}{12} = 5$ см,

при $r_2 = 5$ см $H_2 = \frac{60}{5} = 12$ см.

Осевое сечение конуса



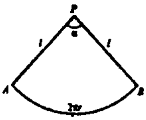
$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 12^2\cdot 5 = 240\pi \text{ см}^3,\ V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 5^2\cdot 12 = 100\pi \text{ см}^3$$

706. Дано: $h = 12$ см, $V = 324\pi$ см^3.

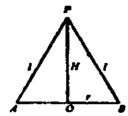
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,\ r^2 = \frac{3V}{\pi h} = \frac{3\cdot 324\pi}{\pi\cdot 12} = 81,$$

$$r = 9 \text{ (см)}.\ \alpha = \frac{360°\cdot r}{l}.$$

Развертка боковой поверхности конуса



Осевое сечение конуса

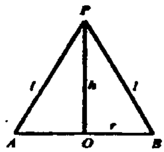


$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = 15 \text{ (см)}.\ \alpha = \frac{360°\cdot 9}{15} = 216°$$

707. Имеем $S_{полн} = S_{осн} + S_{бок}$, $S_{осн} = \pi r^2$, $S_{бок} = \pi rl$. $45\pi = \pi r^2 + \pi rl$, отсюда $45 = r^2 + rl$, где r — радиус основания; а l — образующая конуса.

$$\alpha = \frac{360° r}{l}.\ 60° = \frac{360° r}{l},\ 60°\cdot l = 360° r,\ l = 6r.$$

Запишем систему: $\begin{cases} r^2 + rl = 45, \\ l = 6r. \end{cases}$ $r^2 + 6r^2 = 45,\ r^2 = \frac{45}{7}.$



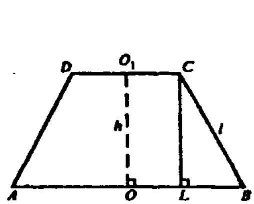
$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{(6r)^2 - r^2} = r\sqrt{35} = \frac{\sqrt{45\cdot 35}}{\sqrt{7}} = 15 \text{ дм}.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\cdot\frac{45}{7}\cdot 15 = \pi\cdot\frac{45\cdot 5}{7} = \frac{225\pi}{7} \text{ дм}^3.$$

708. Имеем $V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r_1{}^2 + rr_1)$, где h — высота; r и r_1 — радиусы оснований конуса.

$O_1C = r_1$, $OB = r$. Построим $CL \perp AB$, $CL = O_1O = h$.

$LB = r - r_1 = 6 - 3 = 3$ м.

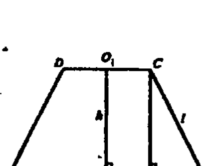


Из треугольника CBL: $CL = \sqrt{CB^2 - BL^2} = \sqrt{l^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$ м,

$$V = \frac{1}{3}\pi\cdot 4(3^2 + 6^2 + 3\cdot 6) = 84\pi \text{ м}^3.$$

709. Имеем $V = \frac{1}{3}\pi(r^2 + r_1{}^2 + r_1 r)h$.

$S_{бок} = S = \pi(r + r_1)l$, где h — высота; а l — образующая; r и r_1 — радиусы оснований конуса.



$O_1C = r_1$, $OB = r$, $LB = r - r_1$ Из треугольника CBL. $h^2 + (r - r_1)^2 = l^2$

Запишем систему·

$$\begin{cases} S = \pi \cdot l(r + r_1), \\ (r - r_1)^2 = l^2 - h^2, \end{cases} \quad \begin{cases} S = \pi \cdot l(r + r_1), \\ r - r_1 = \sqrt{l^2 - h^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{S}{\pi l} = r + r_1, \\ \sqrt{l^2 - h^2} = r - r_1, \end{cases},$$

Тогда $2r = \dfrac{S}{\pi l} + \sqrt{l^2 - h^2}$, $r = \dfrac{1}{2}(\dfrac{S}{\pi l} + \sqrt{l^2 - h^2})$,

$$r_1 = \frac{S}{\pi l} - \frac{1}{2} \cdot \frac{S}{\pi l} - \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - h^2} = \frac{1}{2}(\frac{S}{\pi l} - \sqrt{l^2 - h^2}).$$

$$r^2 + r_1^2 + rr_1 = (r + r_1)^2 - 2rr_1 + rr_1 = (r + r_1)^2 - rr_1 =$$

$$= \left(\frac{S}{2\pi l} + \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{2} + \frac{S}{2\pi l} - \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{S}{\pi l} + \sqrt{l^2 - h^2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{S}{\pi l} - \sqrt{l^2 - h^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{S}{\pi l}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\left(\frac{S}{\pi l}\right)^2 - \left(\sqrt{l^2 - h^2}\right)^2\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{S}{\pi l}\right)^2 + \frac{1}{4}(l^2 - h^2) = \frac{1}{4}\left(\frac{3S^2}{\pi^2 l^2} + l^2 - h^2\right).$$

$$V = \frac{1}{3}\pi h \cdot \frac{1}{4}(\frac{3S^2}{\pi^2 l^2} + l^2 - h^2) = \frac{\pi h}{12}(l^2 - h^2 + \frac{3S^2}{\pi^2 l^2}).$$

$$S_{сеч} = S_{ABCD} = \frac{DC + AB}{2}h = \frac{2r_1 + 2r_2}{2}h = h(r_1 + r_2) =$$

$$h\left(\frac{S}{2\pi l} + \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{2} + \frac{S}{2\pi l} - \frac{\sqrt{l^2 - h^2}}{2}\right) = h\frac{S}{\pi l}.$$

710. а) Дано: $R = 4$ см. $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, $S = 4\pi R^2$. $V = \dfrac{4}{3}\pi \cdot 64 = \dfrac{256\pi}{3}$ см^3.

$S = 4\pi \cdot 16 = 64\pi$ см^2;

б) Дано: $V = 113{,}04$ см^3, $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, $R^3 = \dfrac{3V}{4\pi} = \dfrac{3 \cdot 113{,}04}{4\pi} = \dfrac{339{,}12}{4\pi} \approx 27$,

$R = \sqrt[3]{27} = 3$ см, $S = 4\pi R^2 \approx 36\pi$ см^2;

в) Дано: $S = 64\pi$ см^2. $S = 4\pi R^2$. $64\pi = 4\pi R^2$. $R^2 = 16$. $R = 4$ см,

$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4\pi \cdot 4^3}{3} = \dfrac{256\pi}{3}$ см^3

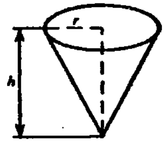
711. $V_з = \dfrac{4}{3}\pi R_з^3$. $D_з = 2R_з$. $V_з = \dfrac{4}{3}\pi \cdot \dfrac{D_з^3}{8} = \dfrac{\pi D_з^3}{6}$; $V_л = \dfrac{4}{3}\pi R_л^3$, $D_л = 2R_л$,

$V_л = \dfrac{\pi D_л^3}{6}$. $\dfrac{V_з}{V_л} = \dfrac{D_з^3}{D_л^3}$, если $D_з = 4D_л$, то $\dfrac{V_з}{V_л} = \dfrac{4^3 D_л^3}{D_л^3} = 64$.

712. $V_Ш = \dfrac{4}{3}\pi R^3$. $V_Ц = \pi r^2 h$. $D_Ш = D_Ц$. то есть $2R = 2r$, отсюда $R = r$. По

условию $V_Ш = V_Ц$. $\dfrac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2 h$. $\dfrac{4}{3}R = h$.

713. $h = 12$ см, $r = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$ см. $V_К = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 6{,}25 \cdot 12 = 25\pi$ см^3.



$V_Ш = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, $R = \dfrac{D}{2}$; $V_Ш = \dfrac{\pi D^3}{6}$, $D = 5$ см, $V_Ш = \dfrac{125\pi}{6}$ см^3.

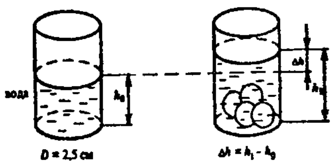
Надо сравнить объемы конуса и шара: 25π и $V\dfrac{125\pi}{6}$,

150 и 125. Т.к. $150 > 125$, то $25\pi > \dfrac{125\pi}{6}$, $V_К > V_Ш$, то есть растаявшее мороженое уместится в стаканчике.

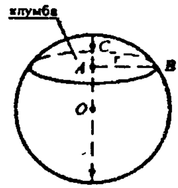
714. $V_{цил} = \pi r^2 h$, $V_{воды} = \pi r^2 h_0 = \pi(\dfrac{D}{2})^2 \cdot h_0 = \dfrac{\pi D^2}{4} h_0$. 4 опущенных шарика занимают объем: $4(\dfrac{4}{3}\pi r^3_{ш}) = \dfrac{16}{3}\pi(\dfrac{D_ш}{2})^3 = \dfrac{2\pi D_ш^3}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ см^3

Т.к. объем шариков равен объему вытесненной воды, то: $\pi\dfrac{D^2}{4}\,\Delta h = \dfrac{2\pi}{3}$;

$\Delta h = \dfrac{8}{3D^2} = \dfrac{4}{3(2{,}5)^2} = \dfrac{32}{75}$.



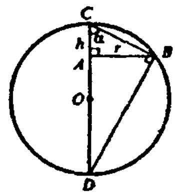
715. Пусть $AC = h$, $AB = r$, r — радиус клумбы; примем радиус шара равным $R_{шх}$. Рассмотрим центральное сечение шара. $CD = 2R$, $\angle CBD = 90°$, т.к. он опирается на диаметр CD.



Из треугольника CDB: $CB = 2R\cos\alpha$; из ΔACB:

$\cos\alpha = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$

Получили уравнение: $2R\dfrac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \sqrt{h^2 + r^2}$,



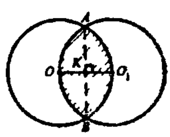
$2Rh = h^2 + r^2$, $R = \dfrac{h^2 + r^2}{2h}$ ($h = 0{,}6$ м),

$R = \dfrac{0{,}36 + 25}{2 \cdot 0{,}6} = \dfrac{25{,}36}{1{,}2} = \dfrac{317}{15}$ м.

$V_{сегм} = \pi h^2(R - \dfrac{1}{3}h)$ $(0{,}6)^2 \cdot \pi\left(\dfrac{317}{15} - \dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{9}{25}\pi \cdot \dfrac{314}{15} = \dfrac{3 \cdot 314\pi}{3 \cdot 25} = \dfrac{924\pi}{125}$

716. Сечение шаров проходит через их центры O и O_1. Хорда $AB \perp OO_1$, $OO_1 = r$, r — радиусы шаров. Общая часть заштрихована и состоит из двух одинаковых шаровых сегментов. Их объемы:

$V = \pi h^2(R - \dfrac{1}{3}h)$, где $h = KO_1 = \dfrac{1}{2}r$, $R = r$

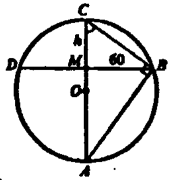


$V = \pi\dfrac{r^2}{4}(r - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}r) = \dfrac{\pi r^2}{4}(r - \dfrac{r}{6}) = \dfrac{5\pi r^3}{24}$

$_{общ} = 2V = \frac{5\pi r^3}{12}$ Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\frac{V_{общ}}{V} = \frac{5\pi r^3}{12} \div \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{5\cdot 3}{4\cdot 12} = \frac{5}{16}$.

717. $MB = 60$ см. $CA = 2R = 2\cdot 75 = 150$ см.

Обозначим $CM = h$. Обозначим $\angle ACB = \varphi$, следовательно, из ΔACB: $CB = CA \cos\varphi = 2R\cos\varphi$.



С другой стороны, из треугольника CMB:

$CB = \sqrt{h^2 + 60^2}$, $\cos\varphi = \frac{CM}{CB} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 60^2}}$.

$2R\frac{h}{\sqrt{h^2+60^2}} = \sqrt{h^2 + 60^2}$, $2Rh = h^2 + 60^2$, $h^2 - 2Rh + 3600 = 0$,

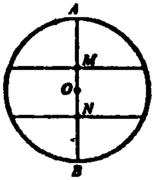
$h_{1,2} = R \pm \sqrt{R^2 - 3600} = 75 \pm \sqrt{5625 - 3600} = 75 \pm 45$; $h_1 = 120$ см, $h_2 = 30$ см.

$V_1 = \pi h_1^2(R - \frac{1}{3}h_1) = \pi\cdot 120^2(75 - \frac{1}{3}\cdot 120) = \pi\cdot 14400\cdot 35 = 504000\pi$ см^3;

$V_2 = \pi h_2^2(R - \frac{1}{3}h^2) = \pi\cdot 30^2(75 - \frac{1}{3}30) = \pi\cdot 900\cdot 65 = 58500\pi$ см^3.

718. $AB = 2R$, $AM = MN = NB = \frac{1}{3}AB = \frac{2R}{3}$

Объем шарового слоя найдем как разность объемов шаровых сегментов, высоты которых NA и MA.

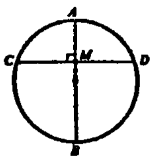


$V_1 = \pi\cdot NA^2(R - \frac{1}{3}NA) = \pi(\frac{4R}{3})^2\cdot(R - \frac{1}{3}\cdot\frac{4R}{3}) = \frac{5\cdot 16}{81}\pi R^3$;

$V_2 = \pi\cdot MA^2(R - \frac{1}{3}MA) = \pi(\frac{2R}{3})^2\cdot(R - \frac{1}{3}\cdot\frac{2R}{3}) = \frac{7\cdot 4}{81}\pi R^3$;

$V_{шар\ слоя} = V_1 - V_2 = (\frac{80}{81} - \frac{28}{81})\pi R^3 = \frac{52}{81}\pi R^3$.

719. Имеем $CD \perp AB$, $AM = 6$ см, $MB = 12$ см. Рассмотрим сечение шара плоскостью большого круга. AB — диаметр шара, $AB = 6 + 12 = 18$ см, $R = 9$ см. Полученные части — шаровые сегменты.

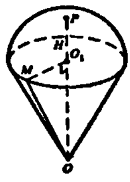


$V_1 = \pi\cdot AM^2(R - \frac{1}{3}AM)$; $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 - V_1$.

$V_1 = \pi\cdot 6^2(9 - \frac{1}{3}6) = 36\pi(9-2) = 252\pi$ см^3.

$V_2 = \frac{4}{3}\pi\cdot 9^3 - 252\pi = \frac{4\pi\cdot 81\cdot 9}{3} - 252\pi = 972\pi - 252\pi = 720\pi$ см^3.

720. Пусть R — радиус шара, r — радиус основания сегмента. Вычислим высоту сегмента $H = PO_1$, $OP = R$.



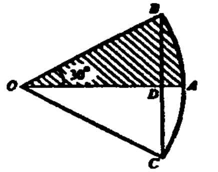
Из прямоугольного треугольника ΔOO_1M:

$OO_1 = \sqrt{OM^2 - O_1M^2} = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{75^2 - 60^2} = 45$ см

$H = PO_1 = OP - O_1O = 75 - 45 = 30$ см.

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H = \frac{2}{3}\pi \cdot 75^2 \cdot 30 = \pi \cdot 20 \cdot 5625 = 112500\pi \text{ см}^3$$

721. Имеем $\angle BOA = 30°$ Тогда $\angle BOC = 60°$, $OB = OC = R$, ΔBOC — равносторонний, сторона BC отсекает от радиуса OA отрезок DA, равный высоте H соответствующего шаровому сектору сегмента.



$$H = AD = AO - OD = R - R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = R\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi R^3\left(2 - \sqrt{3}\right).$$

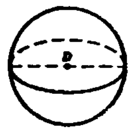
722. $S_{\text{шара}} = 4\pi R^2$ На сушу приходится $\frac{1}{4}$ часть поверхности шара, т е.

$S_{\text{суши}} = \pi\cdot 6375^2 \approx 1{,}28\cdot 10^8 \text{ км}^2 = 128\cdot 10^6 \text{ км}^2$

723. $S = 4\pi R^2$; $S = 4\pi\cdot 10^2 = 400\pi \text{ см}^2$ 1% составит $4\pi \text{ см}^2$, 8% — $32\pi \text{ см}^2$

$S = 400\pi + 32\pi = 432\pi \approx 1357 \text{ см}^2$

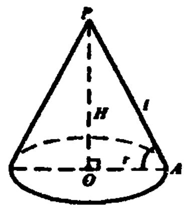
724. Имеем $S_{\text{сф}} = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = 4\pi\frac{D^2}{4} = \pi D^2$;



$S_{\text{полн кон}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$.

Из треугольника AOP: $\cos\angle A = \frac{OA}{PA} = \frac{r}{l} = \frac{1}{2}$, $\angle A = 60°$

$$OA = r = H\cdot\frac{1}{\text{tg}60°} = \frac{H}{\sqrt{3}};\ S_{\text{осн}} = \pi r^2 = \pi\cdot\frac{H^2}{3}$$



$$l = 2\cdot\frac{H}{\sqrt{3}}.\ S_{\text{бок}} = \pi r l = \pi\cdot\frac{H}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2H}{\sqrt{3}} = \pi\cdot\frac{2H^2}{3},$$

$$S_{\text{полн кон}} = \frac{\pi H^2}{3} + \frac{2\pi H^2}{3} = \frac{3\pi H^2}{3} = \pi H^2$$

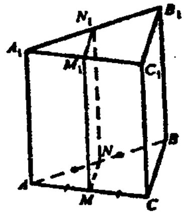
По условию $H = D$, т.е. $S_{\text{сф}} = S_{\text{полн кон}}$.

Вопросы к главе VII

1. а) $V_2 > V_1$; б) $V_1 = V_2 = n$ (см^3).

2. Заметим, что $\Delta AMN \sim \Delta ACB$.

$$\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ACB}} = \left(\frac{MN}{CB}\right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{2}BC}{BC}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$



$V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1$, $V_{AMNA_1M_1N_1} = S_{\Delta AMN} \cdot AA_1$,

$$\frac{V_{AMNA_1M_1N_1}}{V_{ACBA_1B_1C_1}} = \frac{S_{\Delta AMN} \cdot AA_1}{S_{\Delta ACB} \cdot AA_1} = \frac{1}{4}.$$

3. $V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{4} D^2 \cdot h.$

$D_1 = 2D$. $h_1 = \frac{h}{4}$. $V_1 = \frac{\pi}{4} \cdot (2D)^2 h_1 = \frac{\pi}{4} \cdot 4D^2 \cdot \frac{h}{4} = \frac{\pi}{4} D^2 h$. $V_1 = V$.

4. $V = \frac{1}{3} S_{осн} h$, $h_1 = nh$.

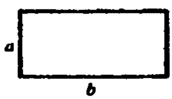
В основании многоугольник, у которого: а) число сторон осталось без изменений; б) углы остались без изменений, т.е. полученный многоугольник подобен исходному, а площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон. Обозначим: x — сторона исходного многоугольника, $\frac{x}{n}$ — сторона полученного.

$\frac{S_1}{S_{осн}} = \left(\frac{\frac{a}{n}}{a}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$, где S_1 — площадь основания полученного многоугольника.

$$V = \frac{1}{3} S_1 h_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_{осн}}{n^2} \cdot n \cdot h = \frac{1}{3} S_{осн} h \frac{1}{n} = \frac{V}{n}$$

5. В качестве четырехугольников рассмотрим параллелограмм и прямоугольник. Обозначим их стороны a и b.

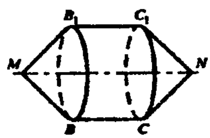
$S_1 = ab\sin\alpha$



$S_2 = ab$

$ab\sin\alpha < ab$, т.е. $V_1 = \frac{1}{3} S_1 h$ и $V_2 = \frac{1}{3} S_2 h$ связаны неравенством $V_1 < V_2$, т.е. нет.

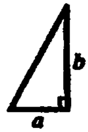
6. $r_1 = 2r_2$; $V_1 = \pi r_1^2 h$; $V_2 = \pi r_2^2 h$. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi h r_1^2}{\pi h r_2^2} = \frac{4r_2^2}{r_2^2} = 4$.



7. Тело вращения будет состоять из трех тел: прямого цилиндра BCC_1B_1 и двух равных конусов.

8. Конус 1: обозначим радиус основания a; высота b. Тогда объем равен: $V_1 = \pi a^2 b$.

Конус 2: радиус основания b; высота a; $V_2=\pi b^2a$.



Если $a\neq b$, то $V_1\neq V_2$.

9. Шар 1: $D=2R_1$; шар 2: $D=R_2$, $2R_1=R_2$.

а) $\dfrac{R_1}{R_2}=\dfrac{R_1}{2R_1}=\dfrac{1}{2}$;

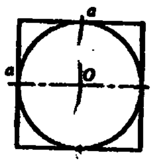
б) $V_1=\dfrac{4}{3}\pi R_1^3$; $V_2=\dfrac{4}{3}\pi R_2^3=\dfrac{4}{3}\pi\cdot 8R_1^3$. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_1^3\cdot 8}=\dfrac{1}{8}$.

10. Имеем R=6 см, $V=\dfrac{4}{3}\pi\cdot 6^3$; r=2 см, $V_1=\dfrac{4}{3}\pi\cdot 2^3$, $n\cdot V_1=\dfrac{4}{3}\pi\cdot 2^3\cdot n$.

Тогда получили уравнение $\dfrac{4}{3}\pi\cdot 2^3\cdot n=\dfrac{4}{3}\pi\cdot 6^3$, $2^3\cdot n=6^3$, $n=\dfrac{6\cdot 6\cdot 6}{2\cdot 2\ 2}=3^3=2$

11. Обозначим ребро куба равное a. Вписанный шар касается всех граней куба в их центрах. Вершины куба, вписанного в шар, лежат на поверхности шара. Радиус описанного шара равен половине диагонали куба.

$R=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $r=\dfrac{a}{2}$ $V_{вп}=\dfrac{4}{3}\pi r^2=\dfrac{4\pi}{3}\cdot(\dfrac{a}{2})^3=\dfrac{pa^3}{6}$;



$V_{оп}=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi(\dfrac{a\sqrt{3}}{2})^3=\dfrac{\sqrt{3}pa^3}{2}$. $\dfrac{V_{оп}}{V_{вп}\bullet}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}}{\frac{\pi a^3}{6}}=3\sqrt{3}$.

12. $S=4\pi R^2$,

а) $R_1=\dfrac{R}{2}$; $S=4\pi R^2$; $S_1=4\pi R_1^2=4\pi\cdot\dfrac{R^2}{4}=\pi R^2$. $\dfrac{S}{S_1}=\dfrac{4\pi R^2}{\pi R^2}=4$, $S=\dfrac{1}{4}S$ — уменьшится в 4 раза;

б) $R_1=3R$. $S=4\pi R^2$; $S_1=4\pi R_1^2=4\pi\cdot(3R)^2=4\pi\cdot 9R^2$. $\dfrac{S}{S_1}=\dfrac{4\pi\cdot 9R^2}{4\pi R^2}=9$; $S=9S$ — увеличится в 9 раз.

13. Для шара 1: $V_1=\dfrac{4}{3}\pi R_1^3$; Для шара 2: $V_2=\dfrac{4}{3}\pi R_2^3$,

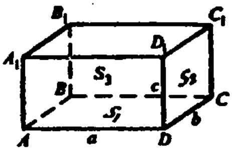
$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}=(\dfrac{R_1}{R_2})^3=8$; $\dfrac{R_1}{R_2}=2$; $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{4\pi R_1^2}{\pi R_2^2}=(\dfrac{R_1}{R_2})^2=4$.

14. Пусть $S_1:S_2=m^2:n^2$.

Для шара 1: $S_1=4\pi R_1^2$, $V_1=\dfrac{4\pi}{3}R_1^3$; Для шара 2: $S_2=4\pi R_2^2$, $V_2=\dfrac{4\pi}{3}\pi R_2^3$

$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{4\pi R_1^2}{\pi R_2^2}=(\dfrac{R_1}{R_2})^2=\dfrac{m^2}{n^2}$; $\dfrac{R_1}{R_2}=\dfrac{m}{n}$; $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}=(\dfrac{R_1}{R_2})^3=(\dfrac{m}{n})^3$

725. Обозначим $S_{ABCD}=S_1$, $S_{DD_1C_1C}=S_2$. $S_{AA_1D_1D}=S_3$; AD=a, DC=b, DD_1=c.

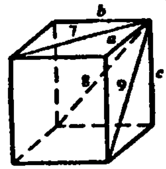


$$\begin{cases} S_1 = ab, \\ S_2 = cb, \\ S_3 = ac, \end{cases} \begin{cases} S_1 = ab, \\ \frac{S_2}{S_3} = \frac{b}{a}, \end{cases} \begin{cases} b = \frac{S_1}{a}, a^2 = \frac{S_1S_3}{S_2}, \\ \frac{S_2}{S_3} = \frac{S_1}{a^2}, a = \sqrt{\frac{S_1S_3}{S_2}}, \end{cases}$$

$$b=\frac{S_1\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1S_3}}=\sqrt{\frac{S_1S_2}{S_3}};\ c=\frac{S_3\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1S_3}}=\frac{\sqrt{S_3S_2}}{\sqrt{S_1}}.$$

$$V=abc;\ V=\sqrt{\frac{S_1S_3}{S_2}\cdot\frac{S_1S_2}{S_3}\cdot\frac{S_3S_2}{S_1}}=\sqrt{S_1\cdot S_2\cdot S_3},\ V=\sqrt{6\cdot 12\cdot 18}=36\text{ дм}^3.$$

726. Обозначим стороны параллелепипеда за a, b, c. Составим систему уравнений:

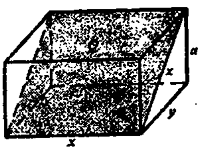


$$\begin{cases} a^2+c^2=81, \\ b^2+c^2=64, \\ a^2+b^2=49. \end{cases} \begin{cases} a^2-b^2=17, \\ a^2+b^2=49. \end{cases}$$

$2a^2=66$, $a^2=33$, $a=\sqrt{33}$; $b^2=49-33=16$, $b=4$; $c^2=64-16=48$, $c=4\sqrt{3}$.

$V=abc$; $V=\sqrt{33}\cdot 4\cdot 4\sqrt{3}=16\cdot\sqrt{3\cdot 3\cdot 11}=16\cdot 3\cdot\sqrt{11}=48\sqrt{11}$ см^3.

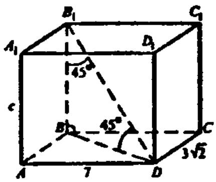
727. Сечение заштриховано, его сторона равна x. Сторона основания y.



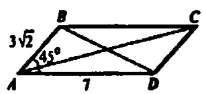
$x^2=Q$, $x=\sqrt{Q}$. $y^2+a^2=x^2$, $y^2+a^2=Q$, $y=\sqrt{Q-a^2}$ $V=xya$;

$V=a\sqrt{Q}\sqrt{Q-a^2}=a\sqrt{Q^2-a^2Q}$.

728. В основании параллелепипеда — параллелограмм, боковое ребро перпендикулярно к плоскости основания.



BD — меньшая диагональ, т.к. $\angle A=45°$, а $\angle B=135°$, поэтому BD<AC. ΔBB_1D — прямоугольный, BB_1=BD. По теореме косинусов из треугольника ABD:



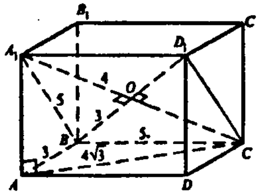
$BD^2=49+18-2\cdot 7\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=49+18-42=7+18=25$; BD=5 см.

$S_{осн}=S_{ABCD}=7\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sin 45°=7\cdot 3\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=21$ см^2.

$BD=BB_1=5$ см $V_{пар}=S_{осн}\cdot BB_1=5\cdot 21=105$ см^3

729. A_1BCD_1 — параллелограмм, в котором диагонали перпендикулярны. Значит, A_1BCD_1 — ромб. По свойству диагоналей ромба A_1O=OC и

BO=OD$_1$. По теореме Пифагора из ΔA_1OB A_1B=5см. Из прямоугольного A_1AB: $AA_1=\sqrt{25-9}=4$ см.



Вычислим площадь основания.

Из ΔA_1AC: $AC=\sqrt{A_1C^2-A_1A^2}=\sqrt{8^2-4^2}=$
$=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$ см.

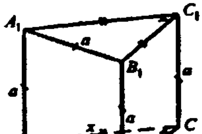
По теореме косинусов в треугольнике ABC $(4\sqrt{3})^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos\angle B$; $\cos\angle B=-\frac{7}{15}$,

$\sin\angle B=\sqrt{1-\cos^2\angle B}=\sqrt{1-\frac{49}{225}}=\frac{\sqrt{176}}{15}$ $S_{осн}=3\cdot5\cdot\frac{\sqrt{176}}{15}=\sqrt{176}$ см^2

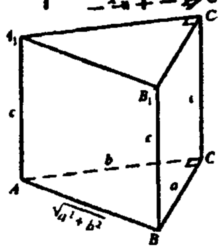
$V=S_{осн}\cdot A_1A=4\sqrt{176}=4\sqrt{16\cdot11}=16\sqrt{11}$ см^3

730. Пусть $BC=B_1C_1=AC=A_1C_1=x$. Из прямоуголь-ного треугольника ABC: $x^2+x^2=a^2$, $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$

$S_{осн}=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}(\frac{a}{\sqrt{2}})^2=\frac{a^2}{4}$ $V=S_{осн}\cdot AA_1=\frac{a^2}{4}a=\frac{a^3}{4}$



731. Пусть AC=b, BC=a, тогда, $AB=\sqrt{a^2+b^2}$ Пусть $A_1A=c$. Площади боковых граней, которые являются прямоугольниками, равны соответственно ac; bc; $\sqrt{a^2+b^2}$ c. Т.к. $\sqrt{a^2+b^2}>b$ и $\sqrt{a^2+b^2}>a$, то наибольшую площадь имеет грань со сторонами $\sqrt{a^2+b^2}$ и c. $S_{осн}=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab$.



Пусть a<b, $\begin{cases}(\frac{1}{2}ab)c=3, & (1)\\ \sqrt{a^2+b^2}\cdot c=3\sqrt{5}, & (2)\\ c=3. & (3)\end{cases}$

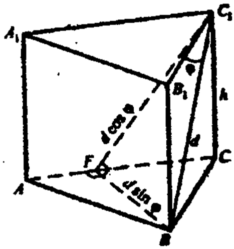
Из (1) имеем: $ac\cdot\frac{1}{2}b=3$, $3\cdot\frac{1}{2}b=3$, b=2.

Из уравнений (3) и (2): $\begin{cases}ac=3,\\ c\sqrt{a^2+4}=3\sqrt{5},\end{cases}$ $\begin{cases}a^2c^2=9,\\ a^2c^2+4c^2=45\end{cases}$

$9+4c^2=45$, $4c^2=36$, $c^2=9$ (c>0), поэтому c=3: $a=\frac{3}{3}=1$.

Итак, a=1, b=2, c=3. $AB=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$ м.

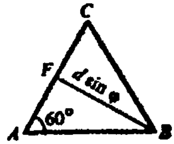
732. Обозначим $BC_1=d$, $CC_1=h$. Проведем BF перпендикулярно AC, отрезок C_1F, он является проекцией BC_1 на плоскость боковой грани AA_1C_1C, $\angle BC_1F=\varphi$.



Из прямоугольного треугольника FC_1B: $FB=d\sin\varphi$.

$$AB=\frac{FB}{\sin 60^\circ}=\frac{2d\sin\varphi}{\sqrt{3}}. \qquad S_{\Delta ABC}=S_{осн}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=$$

$$=\left(\frac{2d\sin\varphi}{\sqrt{3}}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{4d^2\sin^2\varphi\sqrt{3}}{3\cdot 4}=\frac{\sqrt{3}}{3}d^2\sin^2\varphi.$$



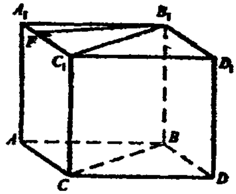
Найдем высоту призмы $C_1C=h$. $FC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}AB=\frac{d\sin\varphi}{\sqrt{3}}$.

Из прямоугольного ΔC_1FC:

$$h=\sqrt{(d\cos\varphi)^2-\left(\frac{d\sin\varphi}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{d^2\cos^2\varphi-\frac{d^2\sin^2\varphi}{3}}=d\sqrt{\frac{3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{3}}.$$

$$V=S_{осн}\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{3}d^2\sin^2\varphi\cdot d\sqrt{\frac{3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{3}}=\frac{d^3\sin^2\varphi}{3}\cdot\sqrt{3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}.$$

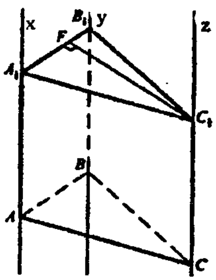
733. $ABCAB_1C_1$ — треугольная призма, $B_1B\parallel$ плоскости AA_1C_1C. Построим $B_1F\perp$ плоскости AA_1C_1C. Отрезок B_1F есть расстояние от грани AA_1C_1C до параллельного ей ребра B_1B. Достроим данную призму до параллелепипеда $ABDCA_1B_1D_1C_1$. За основание параллелепипеда возьмем грань AA_1C_1C, следовательно, его высотой будет отрезок B_1F.



$V_{пар}=S_{AA_1C_1C}\cdot B_1F$.

Плоскость C_1CBB_1 делит параллелепипед на две равновеликие призмы, тогда, объем каждой из них составляет $\frac{1}{2}V_{пар}$, или $V_{призмы}=\frac{1}{2}S_{AA_1C_1C}\cdot B_1F$, что и требовалось доказать.

734. $x\parallel y\parallel z$, $AA_1=BB_1=CC_1$. Известно (см. задачу 733), что объем треугольной призмы равен половине произведения площади боковой грани на расстояние от этой грани до параллельного ей ребра.



Возьмем за основание грань AA_1B_1B, из точки C_1 проведем отрезок $C_1F\perp$ плоскости AA_1B_1B. Отрезок C_1F — высота призмы.

$$V=S_{AA_1B_1B}\cdot C_1F\cdot\frac{1}{2}.$$

Длина C_1F — величина постоянная при заданном положении x, y, z. Расстояние между параллельными прямыми x и y, а значит, и между отрезками AA_1 и BB_1 не меняется, тогда, высота параллелограмма AA_1B_1B - величина постоянная. Тогда площадь $S_{AA_1B_1B}$=const, значит V=const.

735. Обозначим x — коэффициент пропорциональности, S_1, S_2, S_3 — площади боковых граней наклонной призмы. Следовательно

$S_1=x\cdot 20$, $S_2=x\cdot 37$, $S_3=x\cdot 51$. $S_{бок}=S_1+S_2+S_3=10{,}8$ дм^2.

$10{,}8=x\cdot 20+x\cdot 37+x\cdot 51=108x$, $x=\frac{10{,}8}{108}=\frac{1}{10}$.

Значит $S_1=\frac{1}{10}\cdot 20=2$ дм^2; $S_2=\frac{1}{10}\cdot 37=3{,}7$ дм^2; $S_3=\frac{1}{10}\cdot 51=5{,}1$ дм^2.

Пусть боковые грани пересечены плоскостью, перпендикулярной к ним Линии пересечения секущей плоскости с боковыми гранями будут высотами боковых граней, то есть высотами параллелограммов. Пусть у боковых граней с площадями S_1, S_2, S_3, высоты равны h_1, h_2, h_3.

Значит, $2=h_1\cdot 0{,}5$, $h_1=\frac{2}{0{,}5}=4$ дм; $3{,}7=h_2\cdot 0{,}5$, $h_2=\frac{3{,}7}{0{,}5}$ дм; $5{,}1=h_3\cdot 0{,}5$, $h_3=\frac{5{,}1}{0{,}5}$ дм.

Полупериметр перпендикулярного сечения равен:

$p=\frac{1}{2}(4+\frac{37}{5}+\frac{51}{5})=\frac{1}{2}(4+\frac{88}{5})=\frac{108}{2\cdot 5}=\frac{54}{5}$ дм.

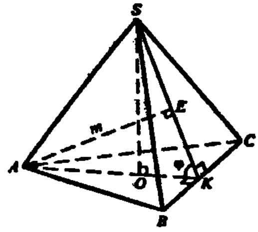
Вычислим площадь перпендикулярного сечения:

$$S=\sqrt{p(p-h_1)(p-h_2)(p-h_3)}=\sqrt{\frac{54}{5}\cdot(\frac{54}{5}-4)\cdot(\frac{54}{5}-\frac{37}{5})\cdot(\frac{54}{5}-\frac{51}{5})}=\sqrt{\frac{54}{5}\cdot\frac{34}{5}\cdot\frac{17}{5}\cdot\frac{3}{5}}=$$

$$=\frac{1}{25}\sqrt{54\cdot 17^2\cdot 2\cdot 3}=\frac{17}{25}\cdot 6\cdot 3=\frac{17\cdot 18}{25}\text{ дм}^2.$$

$$V=S\cdot 0{,}5=\frac{17\cdot 18}{25}\cdot\frac{1}{2}=\frac{17\cdot 9}{25}=\frac{153}{25}=6{,}12\text{ дм}^2.$$

736. Пусть SO — высота пирамиды, O — центр правильного ΔABC. Проведем AK перпендикулярно BC, отрезок SK. По теореме о трех перпендикулярах $SK\perp BC$, поэтому $\angle AKS=\varphi$ — линейный угол двугранного угла при основании.



Проведем AE перпендикулярно плоскости BSC Поскольку плоскость ASK перпендикулярна плоскости BSC, то AE $\subset$ плоскости ASK.

Из прямоугольного ΔAEK: $AK=\frac{m}{\sin\varphi}$. Обозначим сторону основания равной x, тогда из треугольника ΔABK: $AK=x\sin 60°=\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Тогда, $\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{m}{\sin\varphi}$,

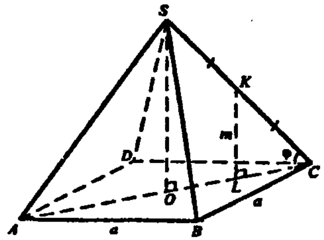
$$x=\frac{m\cdot 2}{\sqrt{3}\sin\varphi}.\ S_{\Delta ABC}=S_{осн}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{4m^2}{3\sin^2\varphi}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{m^2\sqrt{3}}{3\sin^2\varphi}.$$

В ΔABC OK — радиус вписанной окружности,

$$OK=\frac{a}{2\sqrt{3}}=\frac{2m}{\sqrt{3}\sin\varphi}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{m}{3\sin\varphi}.$$

В ΔSOK: $\frac{SO}{OK}=\operatorname{tg}\varphi$, $SO=OK\operatorname{tg}\varphi=\frac{m}{3\sin\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{m}{3\cos\varphi}$.

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot SO;\ V=\frac{1}{3}\cdot\frac{m^2\sqrt{3}}{3\sin^2\varphi}\cdot\frac{m}{3\cos\varphi}=\frac{m^2\sqrt{3}}{\sin^2\varphi\cos\varphi}:27.$$

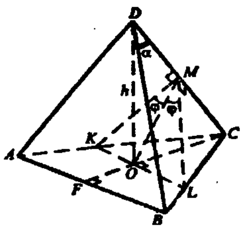


737. Имеем SO — высота пирамиды, O — точка пересечения диагоналей квадрата ABCD. Обозначим сторону основания равной x. K — середина ребра SC, KL $\perp$ плоскости ABCD, KL=m, т.к. плоскость SOC перпендикулярна плоскости ABCD и K $\in$ плоскости SOC. KL — средняя линия в ΔSOC, значит SO=2m.

$$LC=\frac{m}{\operatorname{tg}\varphi},.\ OC=2CL=\frac{2m}{\operatorname{tg}\varphi},\ AC=2OC=\frac{4m}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Из прямоугольного треугольника ABC: $x\sqrt{2}=\frac{4m}{\operatorname{tg}\varphi}$, $x=\frac{4m}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi}$.

$$S_{осн}=x^2=\frac{16m^2}{2\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{8m^2}{\operatorname{tg}^2\varphi}.\ V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot SO=\frac{1}{3}\cdot\frac{8m^2}{\operatorname{tg}^2\varphi}\cdot 2m=\frac{16m^3}{3\operatorname{tg}^2\varphi}.$$



738. Имеем DO — высота пирамиды, плоскость DOC$\perp$ плоскости ABC. Проведем OM $\perp$ DC, через точку O проведем KL параллельно AB, отрезки ML и MK KL перпендикулярно плоскости DOC, значит, KL$\perp$DC.

OM$\perp$DC — по построению. Плоскость KLM$\perp$DC и поэтому LM$\perp$DC и KM$\perp$DC.

Тогда, $\angle KML=2\varphi$, $\Delta KOM=\Delta LOM$, значит $\angle KMO=\angle LMO=\varphi$.

Пусть $\angle ODM=\alpha$, следовательно, из прямоугольного ΔODM: $OM=h\sin\alpha$

Примем KO=OL=y. Из прямоугольного ΔLOM: $\frac{y}{h\sin\alpha}=\operatorname{tg}\varphi$. (1)

Рассмотрим треугольник ABC. В нем OC — радиус описанной окружности, OC=R, а OF — радиус вписанной окружности. OF=r. Обозначим сторону основания x, следовательно, $AF=FB=\frac{x}{2}$.

Из подобия треугольников FCB и OLC имеем: $\frac{d}{R}=\frac{x}{2(R+r)}$, т.е. $d=\frac{xR}{2(R+r)}=$

$=\frac{x\cdot x}{\sqrt{3}\cdot 2\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{x}{3}$, т.к. $R=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $R+r=FC=x\cdot\sin 60^\circ=\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Возвращаясь к (1), имеем: $\frac{1}{h\sin\alpha}\cdot\frac{x}{3}=\operatorname{tg}\varphi$ (2).

Из ΔDOC: $\frac{R}{h}=\operatorname{tg}\alpha$, или $\frac{x}{\sqrt{3}h}=\operatorname{tg}\alpha$, поэтому $x=h\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$.

Подставим в (2): $\frac{h\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\alpha}{3h\cdot\sin\alpha}=\operatorname{tg}\varphi$; $h\sqrt{3}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\varphi\cdot 3h\cdot\sin\alpha$, т.е.

$3\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3\operatorname{tg}\varphi}$. $DC=\frac{h}{\cos\alpha}=\frac{h\cdot 3\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\,h\operatorname{tg}\varphi$.

Вычислим сторону основания x: $\frac{x}{\sqrt{3}}=R$, с другой стороны, из ΔDOC:

$R=\sqrt{DC^2-h^2}$, $R=\sqrt{3h^2\operatorname{tg}^2\varphi-h^2}=h\sqrt{3\operatorname{tg}^2\varphi-1}$, т.е. $\frac{x}{\sqrt{3}}=h\sqrt{3\operatorname{tg}^2\varphi-1}$,

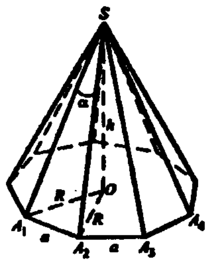
$x=h\sqrt{3}\cdot\sqrt{3\operatorname{tg}^2\varphi-1}$. $S_{осн}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$; $S_{осн}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot h^2\cdot 3(3\operatorname{tg}^2\varphi-1)$.

$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}h^2}{4}\cdot(3\operatorname{tg}^2\varphi-1)\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot h^3(3\operatorname{tg}^2\varphi-1)$.

739. Имеем SO — высота пирамиды. В основании — правильный n-угольник, O — его центр.

$OA_1=OA_2=...=OA_n=R$, где R — радиус описанной окружности.

$R=\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$.



Обозначим боковое ребро пирамиды через b. Тогда из ΔA_1SA_2 по теореме синусов имеем:

$$\frac{b}{\sin\frac{180^\circ-\alpha}{2}}=\frac{a}{\sin\alpha};\ b=\frac{a\sin(90^\circ-\frac{\alpha}{2})}{\sin\alpha}=\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Из прямоугольного треугольника ΔA_1OS:

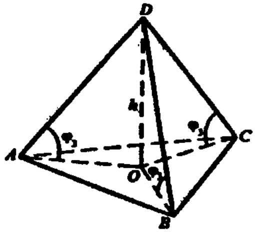
$$h=SO=\sqrt{b^2-R^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{a^2}{4\sin^2\frac{180^\circ}{n}}}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{180^\circ}{n}}}.$$

Вычислим площадь основания.

Площадь правильного n-угольника:

$$S_{осн}=\frac{na^2}{4\text{tg}\frac{180^\circ}{n}}.\ V=\frac{1}{3}S_{осн}h=\frac{1}{3}\frac{na^2}{4\text{tg}\frac{180^\circ}{n}}\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{\sin^2\frac{180^\circ}{n}}}.$$

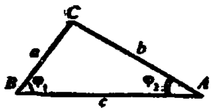
740. $\Delta DOA=\Delta DOB=\Delta DOC$ (по катету и строму углу). Тогда, $DA=DB=DC$ и $OA=OB=OC=R$, R — радиус окружности, описанной около ΔABC.



Из треугольника AOD: $\frac{h}{OA}=\text{tg}\,\varphi_3$, $OA=R=\frac{h}{\text{tg}\varphi_3}$.

Рассмотрим треугольник ABC. По теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin\varphi_2}=\frac{b}{\sin\varphi_1}=\frac{c}{\sin(\varphi_2+\varphi_1)}=2R=\frac{2h}{\text{tg}\varphi_3},\ \text{т.е.}$$

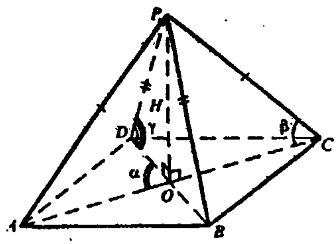


$$a=\frac{2h}{\text{tg}\varphi_3}\sin\varphi_2,\ b=\frac{2h}{\text{tg}\varphi_3}\sin\varphi_1.$$

$$S_{\Delta ABC}=S_{осн}=\frac{1}{2}ab\sin(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{2h}{\text{tg}\varphi_3}\right)^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\varphi_1+\varphi_2).$$

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4h^2}{\text{tg}^2\varphi_3}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{2}{3}\frac{h^2}{\text{tg}^2\varphi_3}\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin(\varphi_1+\varphi_2).$$

741. $V=\frac{1}{3}S_{осн}H$.



Из прямоугольного треугольника POD:

$$\frac{PO}{OD}=\text{tg}\gamma,\ \frac{H}{OD}=\text{tg}\gamma,\ OD=\frac{H}{\text{tg}\gamma}.$$

Из прямоугольного треугольника POC:

$$\frac{PO}{OC}=\text{tg}\beta,\ \frac{H}{OC}=\text{tg}\beta,\ OC=\frac{H}{\text{tg}\beta}.$$

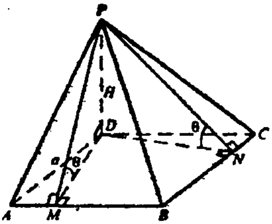
$OD=OB$ и $OA=OC$ — из свойства диагоналей параллелограмма.

$$DB=2\cdot OD=\frac{2H}{\text{tg}\gamma};\ AC=2\cdot OC=\frac{2H}{\text{tg}\beta}.\ S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot DB\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{2H}{\text{tg}\gamma}\cdot\frac{2H}{\text{tg}\beta}\cdot\sin\alpha=$$

$$=2H^2\text{ctg}\gamma\cdot\text{ctg}\beta\cdot\sin\alpha.\ V=\frac{1}{3}\cdot 2H^2\cdot\text{ctg}\gamma\cdot\text{ctg}\beta\cdot\sin\alpha\cdot H=\frac{2}{3}H^3\text{ctg}\gamma\cdot\text{ctg}\beta\cdot\sin\alpha.$$

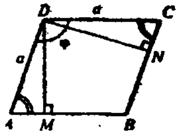
742. Линия пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к третьей плоскости — перпендикуляр к этой плоскости; значит, PD перпендикулярна плоскости ABCD. PD — высота пирамиды, $PD=H$. $\angle ADC=\varphi$ — линейный угол двугранного угла при ребре PD. В основании ABCD $\angle A=\angle C=180^\circ-\varphi$. $S_{ABCD}=AD\cdot AB\sin\angle A=a^2\sin(180^\circ-\varphi)=a^2\sin\varphi$.

Построим DM⊥AB, DN⊥CB. По теореме о трех перпендикулярах отрезки PM⊥AB, PN⊥BC.



$\angle PMD=\angle PND=\theta$ — линейные углы двугранных углов, образованных боковыми гранями PAB и PBC с плоскостью основания.

$\Delta ADM=\Delta CDN$, $DM=DN=a\sin(180°-\varphi)=a\sin\varphi$.

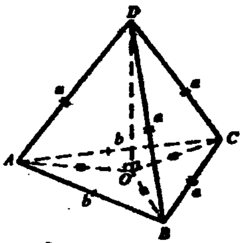


Из треугольника PDN: $\dfrac{H}{DN}=\operatorname{tg}\theta$, $DN\cdot\operatorname{tg}\theta=H$,

$H=a\sin\varphi\cdot\operatorname{tg}\theta$. $V=\dfrac{1}{3}S_{осн}H$; $V=\dfrac{1}{3}a^2\sin\varphi\cdot a\sin\varphi\cdot\operatorname{tg}\theta=$

$=\dfrac{1}{3}a^3\sin^2\varphi\cdot\operatorname{tg}\theta.$

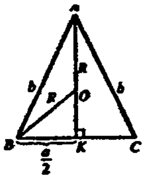
743. а) Пусть AC=AB=b, а DA=DB=DC=BC=a. Построим высоту пирамиды DO, отрезки OA, OB, OC.



$\Delta DOA=\Delta DOB=\Delta DOC$.

Тогда, OA=OB=OC=R, где R — радиус окружности, описанной вокруг ΔABC.

В равнобедренном треугольнике ΔBAC проведем из угла A высоту AK.



$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}a\cdot AK=\dfrac{1}{2}a\cdot\sqrt{b^2-\dfrac{a^2}{4}}$ (в ΔABK: $AK=$

$=\sqrt{AB^2-BK^2}=\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{b^2-\dfrac{a^2}{4}}$).

OA=R, по формуле $R=\dfrac{abc}{4S}$ (a, b, c — стороны треугольника, S — его площадь) Вычислим площадь, вычислим R.

$$R=\frac{abb}{4\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}}=\frac{b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}.$$

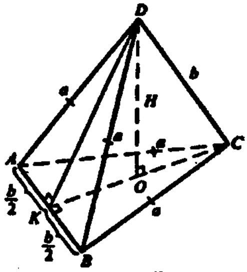
Из ΔADO: $H=DO=\sqrt{a^2-AO^2}=\sqrt{a^2-R^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{b^4}{4b^2-a^2}}=\sqrt{\dfrac{4a^2b^2-a^4-b^4}{4b^2-a^2}}$

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}H=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{4a^2b^2-a^4-b^4}{4b^2-a^2}}=\frac{a\sqrt{4a^2b^2-a^4-b^4}}{12};$$

б) в равнобедренном треугольнике ABC (CA=CB=a) построим высоту CK ⊥AB; проведем отрезок DK.

В треугольнике ADB: DK — высота (ΔADB — равнобедренный, AK=KB, значит, медиана DK является высотой).

$AB \perp DK$, $AB \perp KC$, $AB \perp (DKC)$.

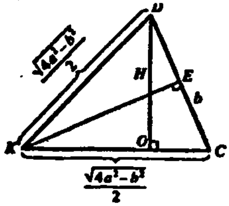


Если плоскость проходит через перпенди-куляр к другой плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости. Итак, плоскости ABC и DKC перпендикулярны. В плоскости DKC проведем высоту пирамиды DO; $DO \perp CK$.

Примем DO=H.

В треугольнике ABC: $CK=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}=\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}$.

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CK=\frac{1}{2}\cdot b\cdot\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}=\frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{4}$.



Вычислим высоту пирамиды: $DK=KC=\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}$.

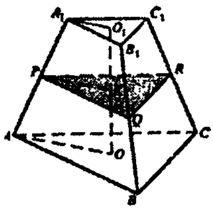
Проведем $KE \perp DC$. $DE=EC=\frac{b}{2}$.

Из треугольника KDE: $KE=\sqrt{KD^2-DE^2}=\sqrt{\frac{4a^2-b^2}{4}-\frac{b^2}{4}}=\sqrt{\frac{4a^2-2b^2}{4}}$

$S_{\Delta KDE}=\frac{1}{2}\cdot KE\cdot DC=\frac{1}{2}\cdot H\cdot KC$;

$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{4}\cdot\frac{b\sqrt{4a^2-2b^2}}{\sqrt{4a^2-b^2}}=\frac{b^2}{12}\sqrt{4a^2-2b^2}$

$\sqrt{\frac{4a^2-2b^2}{4}}\cdot b=H\cdot\frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}$, $H=\frac{b\sqrt{4a^2-2b^2}}{\sqrt{4a^2-b^2}}$.



744. Обозначим $O_1K=KO=h$, $A_1B_1=y$, $AB=x$.

По условию $\frac{x}{y}=\frac{5}{2}$, $y=\frac{2}{5}x$.

Рассмотрим трапецию AA_1O_1O. $PK \parallel AO$, отрезок PK — средняя линия трапеции, значит, $A_1P=PA$.

Рассмотрим грань AA_1B_1B. Это трапеция, через точку P проведен отрезок $PQ \parallel AB$, поэтому PQ является средней линией трапеции.

$PQ=\frac{x+y}{2}=\frac{x+\frac{2}{5}x}{2}=\frac{7x}{10}$.

$PQ \parallel AB \parallel A_1B_1$, $A_1C_1 \parallel PR \parallel AC$, $B_1C_1 \parallel QR \parallel BC$, тогда, $\Delta ABC \sim \Delta PQR \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Площади подобных фигур относятся как квадраты их сходственных сторон.

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}}=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4},\ S\ \Delta A_1B_1C_1=\frac{4}{25}S\ \Delta ABC.$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta PQR}}=\left(\frac{AB}{PQ}\right)^2=\left(\frac{x}{\frac{7x}{10}}\right)^2=\frac{100}{49},\ S\ \Delta PQR=\frac{49}{100}S\ \Delta ABC.$$

Обозначим объем верхней усеченной пирамиды $V_в$, а объем нижней усеченной пирамиды V_H.

Тогда

$$\frac{V_B}{V_H}=\frac{\frac{1}{3}h(S_{\Delta PQR}+S_{\Delta A_1B_1C_1}+\sqrt{S_{\Delta PQR}\cdot S_{\Delta A_1B_1C_1}})}{\frac{1}{3}h(S_{\Delta ABC}+S_{\Delta PQR}+\sqrt{S_{\Delta ABC}\cdot S_{\Delta PQR}})}=\frac{\left(\frac{49}{100}+\frac{4}{25}+\sqrt{\frac{49}{100}\cdot\frac{4}{25}}\right)S_{\Delta ABC}}{\left(1+\frac{49}{100}+\sqrt{1\cdot\frac{49}{100}}\right)S_{\Delta ABC}}=$$

$$=\frac{\frac{49}{100}+\frac{4}{25}+\frac{7\cdot 2}{10\cdot 5}}{1+\frac{49}{100}+\frac{7}{10}}=\frac{49+16+28}{170+49}=\frac{93}{219}=\frac{31}{73}.$$

745. а) Обозначим r — радиус основания цилиндра, h – его высота.

$$\begin{cases}S=2\pi h,\\ \pi r^2=Q,\end{cases}\quad \begin{cases}r=\sqrt{\frac{Q}{\pi}}.\\ h=\frac{S}{2\pi r}=\frac{S}{2\pi\sqrt{\frac{Q}{\pi}}}=\frac{S}{2\sqrt{\pi Q}}\end{cases}\quad V=\pi r^2h=\pi\cdot\frac{Q}{\pi}\cdot\frac{S}{2\sqrt{\pi Q}}=\frac{S}{2}\cdot\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{\pi}};$$

б) обозначим r — радиус основания, т.к. осевое сечение — квадрат, то высота h=2r, тогда $r=\frac{h}{2}$. $V=\pi r^2h=\pi\cdot\frac{h^2}{4}\cdot h=\frac{\pi h^3}{4}$;

в) обозначим r — радиус основания и высота равна диаметру основания, то есть h=2r

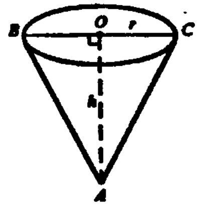
$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r2r=2\pi r^2+4\pi r^2=6\pi r^2.$

$$r=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\quad V=\pi r^2h=\pi\cdot\frac{S}{6\pi}\cdot\sqrt{\frac{S}{6\pi}}=\frac{S}{6}\sqrt{\frac{4S}{6\pi}}=\frac{S}{6}\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}.$$

746. Обозначим r_1, r_2 — радиусы оснований двух цилиндров, а h_1 и h_2 — их высоты. $S_1=2\pi r_1h_1$; $S_2=2\pi r_2h_2$.

По условию $S_1=S_2$; $2\pi r_1h_1=2\pi r_2h_2$, $r_1h_1=r_2h_2$. $V_1=\pi r_1^2h_1$; $V_2=\pi r_2^2h_2$.

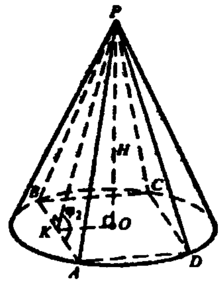
$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi r_1^2h_1}{\pi r_2^2h_2}=\frac{(r_1h_1)\cdot r_1}{(r_2h_2)\cdot r_2}=\frac{r_1}{r_2}.$$



747. OA=h, OC=OB=r. $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$;

$V=\frac{1}{3}\pi\cdot 1{,}5^2\cdot 3=2{,}25\cdot\pi\approx 2{,}25\cdot 3{,}14=7{,}065$ м^3.

1 л=1 дм^3, а 1 м^3=1000 дм^3, поэтому V=7,065·1000=7065 литров.



748. Пусть PO — это высота конуса, PO=H, AB<AD. Построим OK$\perp$AB, отрезок PK. По теореме о трех перпендикулярах PK перпендикулярно AB.

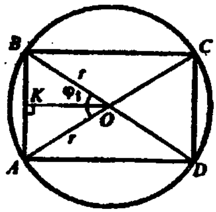
$$\frac{PO}{OK}=\text{tg}\varphi_2,\ \frac{H}{OK}=\text{tg}\varphi_2,\ H=OK\cdot\text{tg}\varphi_2.$$

В основании пирамиды.

AB=a, BO=OD=AO=OC — по свойству диагоналей прямоугольника. BO=R.

В треугольнике ABO:

$$\angle ABO=\angle BAO=\frac{180^\circ-\varphi_1}{2}=90^\circ-\frac{\varphi_1}{2}.$$



По теореме синусов запишем: $\dfrac{a}{\sin\varphi_1}=\dfrac{R}{\sin(90^\circ-\frac{\varphi_1}{2})}$;

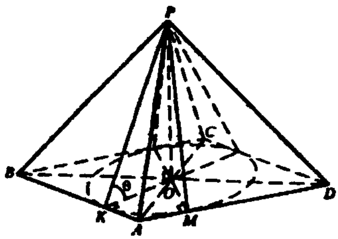
$$R=\frac{a\cdot\sin(90^\circ-\frac{\varphi_1}{2})}{\sin\varphi_1}=\frac{a\cdot\cos\frac{\varphi_1}{2}}{2\cdot\sin\frac{\varphi_1}{2}\cdot\cos\frac{\varphi_1}{2}}=\frac{a}{2\sin\frac{\varphi_1}{2}}.$$

Из треугольника BKO: $OK=R\cdot\cos\dfrac{\varphi_1}{2}=\dfrac{a\cdot\cos\frac{\varphi_1}{2}}{2\cdot\sin\frac{\varphi_1}{2}}$.

$$H=OK\ \text{tg}\varphi_2=\frac{a\cdot\cos\frac{\varphi_1}{2}}{2\cdot\sin\frac{\varphi_1}{2}}\cdot\text{tg}\varphi_2=\frac{a\cdot\text{tg}\varphi_2}{2\text{tg}\frac{\varphi_1}{2}}.$$

$$V_{\text{кон}}=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\varphi_1}{2}}\cdot$$

$$\frac{a\cdot\text{tg}\varphi_2}{2\text{tg}\frac{\varphi_1}{2}}=\frac{\pi a^3\text{tg}\varphi_2}{24\sin^2\frac{\varphi_1}{2}\cdot\text{tg}\frac{\varphi_1}{2}}.$$



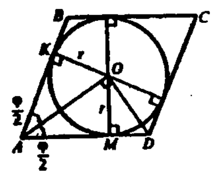
749. Пусть PO — высота пирамиды, обозначим PO=H. PK — образующая конуса, которая лежит в плоскости APB, OK$\perp$AB.

В основание пирамиды рассмотрим.

ABCD — ромб. AB=a.

$S_{ABCD}=4S_{AOD}=2S_{ABC}$

$S_{ABCD}=2(\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\sin\varphi)=a^2\sin\varphi.$

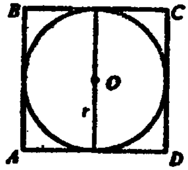


$S_{AOD}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot OM=\frac{1}{2}ar.$

Пришли к уравнению: $a^2 \sin\varphi=4\cdot\frac{1}{2}ar$, откуда $r=\frac{1}{2}a\sin\varphi$.

Из прямоугольного треугольника POK: $\frac{PO}{OK}=\operatorname{tg}\theta$ ($\angle PKO$ — угол, который образующая конуса PK составляет с ее проекцией OK). $\frac{H}{OK}=\operatorname{tg}\theta$, $H=r\cdot\operatorname{tg}\theta=$ $=\frac{1}{2}a\cdot\sin\varphi\cdot\operatorname{tg}\theta$. $V_{кон}=\frac{1}{3}\pi r^2H=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{a^2\sin^2\varphi}{4}\cdot\frac{1}{2}a\sin\varphi\cdot\operatorname{tg}\theta=\frac{\pi a^3}{24}\sin^3\varphi\cdot\operatorname{tg}\theta$.

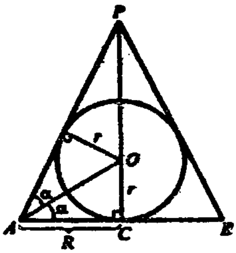
750. Рассмотрим осевое сечение, основанием является квадрат.



Пусть сторона куба равна x, следовательно, радиус шара $r=\frac{x}{2}$.

$V_ш=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(\frac{x}{2})^3=\frac{4\pi x^3}{3\cdot 4\ 2}=\frac{\pi x^3}{6}$.

Радиус основания цилиндра равен $\frac{x}{2}$, высота цилиндра равна x, следовательно, $V_{цил}=\pi(\frac{x}{2})^2\cdot x=\frac{\pi x^3}{4}$. $\frac{V_{цил}}{V_ш}=\frac{\frac{\pi x^3}{4}}{\frac{\pi x^3}{6}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$.



751. Рассмотрим осевое сечение конуса:

$V_{кон}=\frac{1}{3}\pi R^2H$. Обозначим PC=H.

Из треугольника AOC: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{r}{R}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

OA — биссектриса $\angle PAB$, следовательно, $\angle PAB=2\alpha$.

Из прямоугольного треугольника PAC:

$\frac{PC}{AC}=\operatorname{tg}2\alpha$, или $\frac{H}{R}=\operatorname{tg}2\alpha$

$H=R\operatorname{tg}2\alpha=6\operatorname{tg}2\alpha$. $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$. $H=\frac{6\cdot 4}{3}=8$ дм.

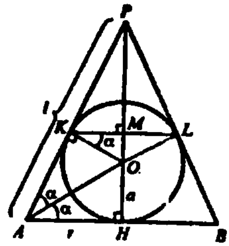
$V_{кон}=\frac{1}{3}\pi\cdot 6^2\cdot 8=96\pi$ дм^3.

752. Рассмотрим сечение конуса.

ΔAPB — осевое сечение конуса, AH=r, AP=l, PH — высота конуса.

Обозначим радиус сферы равен R. OK=OH=OL=R. Точки K и L — точки касания сферы поверхности конуса. Плоскость, в которой лежит окружность, в сечении изображена отрезком KL; KL равен диаметру этой окружности. Обозначим $\angle PAB=2\alpha$.

Из треугольника AOH: $\frac{OH}{HA}=\text{tg}\alpha$; $\frac{R}{r}=\text{tg}\alpha$, $R=r\,\text{tg}\alpha$.



Из треугольника APH: $\cos 2\alpha=\frac{AH}{AP}=\frac{r}{l}$,

$2\cos^2\alpha-1=\frac{r}{l}$, $\cos^2\alpha=\frac{l+r}{2l}$, $\cos\alpha=\sqrt{\frac{l+r}{2l}}$;

$\sin^2\alpha=1-\frac{l+r}{2l}=\frac{l-r}{2l}$, $\sin\alpha=\sqrt{\frac{l-r}{2l}}$;

$\text{tg}\alpha=\sqrt{\frac{l-r}{2l}:\frac{l+r}{2l}}=\sqrt{\frac{l-r}{l+r}}$. $R=r\cdot\sqrt{\frac{l-r}{l+r}}$.

$\angle APH=\angle MKO=90^\circ-2\alpha$.

В треугольнике MOK: $KM=OK\cdot\cos\angle MKO=R\cdot\cos(90^\circ-2\alpha)=R\cdot\sin 2\alpha=$ $=R\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

$KM=r\cdot\sqrt{\frac{l-r}{l+r}}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{l-r}{2l}}\cdot\sqrt{\frac{l+r}{2l}}=2r\cdot\sqrt{\frac{(l-r)^2\cdot(l+r)}{(l+r)\cdot(2l)^2}}=2r\cdot\frac{l-r}{2l}=r\cdot\frac{l-r}{l}$.

KM — радиус окружности, по которой сфера касается боковой поверхности конуса. Ее длина равна

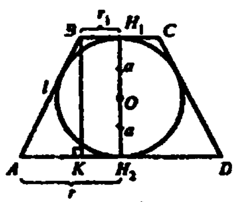
$2\pi\cdot KM=2\pi\cdot\frac{r(l-r)}{l}$.

753. Рассмотрим осевое сечение конуса.

H_1,H_2 — центры оснований. ABCD — сечение, которое является равнобедренной трапецией.

$BH_1=r_1$, $AH_2=r$. Обозначим радиус вписанного шара a. $V_ш=\frac{4}{3}\pi a^3$.

Высота конуса есть диаметр шара, $H_1H_2=2a$.



$V_{кон}=\frac{1}{3}\pi\cdot H_1H_2(r^2+r_1^2+rr_1)=\frac{1}{3}\pi 2a(r^2+r_1^2+rr_1)$.

$\frac{V_{кон}}{V_ш}=\frac{\frac{2\pi a}{3}(r^2+r_1^2+rr_1)}{\frac{4}{3}\pi a^2}=\frac{r^2+r_1^2+rr_1}{2a^2}$.

В описанном 4-угольнике суммы противоположных сторон равны.
$BC+AD=AB+CD=2AB$.
Обозначим $AB=l$, следовательно $2r_1+2r=2l$, $l=r_1+r$.

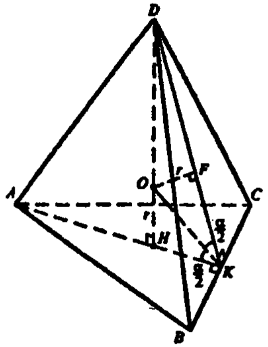
Построим BK перпендикулярно AD. $AK=r-r_1$, $BK=H_1H_2=2a$.
Из прямоугольного треугольникаABK:

$2a=\sqrt{l^2-AK^2}=\sqrt{(r_1+r)^2-(r-r_1)^2}=\sqrt{r_1^2+r^2+2r_1r-r^2-r_1^2+2rr_1}=$

$=\sqrt{4r_1r}=2\sqrt{r_1r}$, $a=\sqrt{r_1r}$.

Подставляя выражение для a в формулу (1), получаем: $\dfrac{V_{кон}}{V_{ш}}=\dfrac{r^2+r_1^2+rr_1}{2rr_1}$.

754. Через основание высоты DH построим AK $\perp$BC, отрезок DK. По теореме о трех перпендикулярах DK перпендикулярно BC.



Центр вписанного шара находится на высоте пирамиды в точке O; OH и OF — радиусы, равные r. По условию задачи

$\dfrac{4}{3}\pi\cdot r^3=V$, поэтому $r=\sqrt{\dfrac{3V}{4\pi}}$.

Т.к. AK$\perp$BC и DK$\perp$BC, то $\angle$AKD — линейный угол двугранного угла при основании пирамиды.

$\angle AKD=\alpha$. OK — биссектриса $\angle$DKA. Из равенства ($\Delta OHK=\Delta OFK$), $\angle HKO=\angle OKF=\dfrac{\alpha}{2}$

Обозначим сторону основания пирамиды за а. В равностороннем треугольнике ABC — HK это радиус вписанной окружности и $HK=\dfrac{x}{2\sqrt{3}}$.

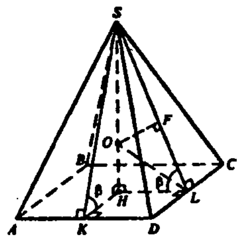
Из прямоугольного треугольника OHK: $\dfrac{r}{HK}=tg\dfrac{\alpha}{2}$, $HK=\dfrac{r}{tg\frac{\alpha}{2}}$.

$\dfrac{x}{2\sqrt{3}}=\dfrac{r}{tg\frac{\alpha}{2}}$, $x=\dfrac{2\sqrt{3}r}{tg\frac{\alpha}{2}}$. В треугольнике DHK: $\dfrac{DH}{HK}=tg\alpha$, $DH=HKtg\alpha=$

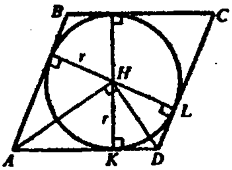
$=\dfrac{r}{tg\frac{\alpha}{2}}\cdot tg\alpha$. $\quad V_{пир}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}DH=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}\cdot DH=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\cdot\left(\dfrac{2\sqrt{3}r}{tg\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{rtg\alpha}{tg\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\cdot$

$\cdot\dfrac{12}{tg^3\frac{\alpha}{2}}\cdot r^3\cdot tg\alpha=\dfrac{\sqrt{3}tg\alpha}{tg^3\frac{\alpha}{2}}\cdot\dfrac{3V}{4\pi}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}\cdot tg\alpha\cdot ctg^3\dfrac{\alpha}{2}\cdot V$.

755. SH перпендикулярна плоскости ABCD. Построим HK$\perp$AD, HL$\perp$DC, отрезки SL и SK. По теореме о трех перпендикулярах SL$\perp$DC и SK$\perp$AD. Тогда, $\angle$SKH и $\angle$SLH — линейные углы двугранных углов при основании пирамиды. Из условий задачи $\angle SKH=\angle SLH=\beta$. $\Delta SHK=\Delta SHL$ (по катету и острому углу).



Точка H равноудалена от сторон ромба ABCD, значит, является центром вписанной в ромб окружности.



$S_{ABCD}=2(\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot \sin\alpha)=a^2 \sin\alpha$; $S_{\Delta AHD}=\frac{1}{2}a\cdot HK$;

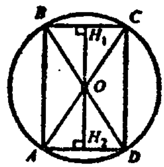
$S_{ABCD}=4\cdot S_{\Delta AHD}$. $a^2\cdot\sin\alpha=2a\cdot HK$, $HK=HL=\frac{a\sin\alpha}{2}$.

Построим отрезок LO, точка O — центр вписанного шара, $O\in SH$. OL — биссектриса $\angle SLH$, $\angle OLH=\frac{\beta}{2}$.

Из треугольника OHL: $\frac{OH}{HL}=\mathrm{tg}\angle HLO$, OH — радиус шара.

$OH=HL\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{a\sin\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$. $V_ш=\frac{4}{3}\pi(OH)^3=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{a^3\sin^3\alpha\,\mathrm{tg}^3\frac{\beta}{2}}{8}=\frac{\pi}{6}\sin^3\alpha\cdot\mathrm{tg}^3\frac{\beta}{2}\cdot a^3$

756. Рассмотрим сечение цилиндра, которое явля-ется прямоугольником ABCD, вписанным в окружность радиуса R.



O — центр сферы (и окружности). BD — диагональ осевого сечения, $\angle BDA=\alpha$. BD=2R.

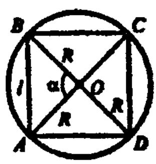
Вычислим из прямоугольного треугольника BAD $AD=2R\cos\alpha$.

Радиус основания цилиндра равен $\frac{1}{2}AD$, то есть $R\cos\alpha$.

Высота цилиндра $AB=2R\sin\alpha$.

$V_{цил}=\pi\cdot(R\cos\alpha)^2\cdot AB=\pi R^2\cos^2\alpha\cdot 2R\sin\alpha=\pi R^3\cos\alpha\,(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)=$
$=\pi R^3\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha$.

757. Рассмотрим сечение цилиндра с шаром, которое является прямоугольником ABCD, вписанным в окружность радиуса R, точка O — центр окружности и сферы. Образующая цилиндра AB=l.



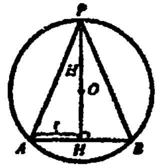
BO=OD=OA=OC=R.

Из треугольника AOB по теореме синусов:

$$\frac{l}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin(\frac{180°-\alpha}{2})}=\frac{R}{\sin(90°-\frac{\alpha}{2})}=\frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

$$R=\frac{l\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{l\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{l}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.\ V_ш=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{l^3}{8\sin^3\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pi l^3}{6\sin^3\frac{\alpha}{2}}$$

758. Рассмотрим сечение шара и конуса, которое является равнобедренным треугольником APB, PH — высота конуса, O — центр описанной окружности (и шара), $O\in PH$.



PH=H, AH=r Обозначим R — радиус окружности большого круга шара; OP=OA=OB=R.

Из треугольника APH: AP=$\sqrt{H^2+r^2}$, PB=AP.

$S_{\Delta APB}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot PH=\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot H=rH.$

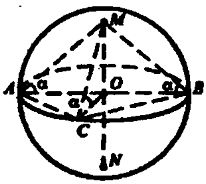
Вычислим R по формуле: $R=\frac{abc}{4S}$, где a, b,c — стороны треугольника APB, а S — его площадь. $R=\frac{\sqrt{H^2+r^2}\cdot\sqrt{H^2+r^2}\cdot 2r}{4rH}=\frac{H^2+r^2}{2H}$

Площадь поверхности шара:

$S=4\pi R^2=4\pi(\frac{H^2+r^2}{2H})^2=\frac{4\pi(H^2+r^2)^2}{4H^2}=\frac{\pi(H^2+r^2)^2}{H^2}$.

Объем шара: $V=\frac{4\pi}{3}R^3=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{(H^2+r^2)^3}{8H^3}=\frac{\pi(H^2+r^2)^3}{6H^3}$

759. Плоскость треугольника ABC, лежащего в основании пирамиды, пересечет шар по окружности, и треугольник ABC будет вписан в эту окружность. Пусть AB — гипотенуза, следовательно, $\angle ACB=90^\circ$, тогда, он опирается на диаметр, которым является гипотенуза AB.



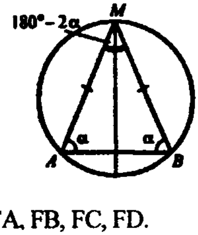
Построим высоту пирамиды MO. Построим отрезки OA, OB, OC; эти три отрезка являются проекциями соответствующих наклонных боковых ребер пирамиды.

В треугольниках MOA, MOB, MOC MO — общий катет, $\angle MAO=$ $=\angle MBO=\angle MCO=\alpha$ — по условию, тогда, $\Delta MOA=\Delta MOB=\Delta MOC$, откуда OA=OB=OC, то есть точка O — равноудалена от вершин основания и поэтому является центром описанной около основания окружности.

Таким образом, MO — высота пирамиды, MO лежит в плоскости AMB, тогда, плоскость AMB перпендикулярна плоскости ABC.

Из теоремы синусов следует, что: $\frac{AB}{\sin(180^\circ-2\alpha)}=2R$, R — радиус шара.

$\frac{2}{\sin 2\alpha}=2R$, $R=\frac{1}{\sin 2\alpha}$.



Площадь поверхности шара: $S=4\pi R^2=\frac{4\pi}{\sin^2 2\alpha}$ см^2.

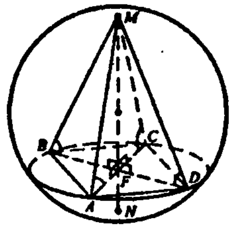
Вычислим объем шара: $V=\frac{4}{3}R^3=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sin^3 2\alpha}$ см^3.

760. Построим высоту пирамиды MF; построим отрезки FA, FB, FC, FD.

$\Delta MFA=\Delta MFB=\Delta MFC=\Delta MFD$, т.к. они прямоугольные, MF — общий катет. $\angle MBF=\angle MAF=\angle MCF=\angle MDF=\beta$ — по условию.

Следовательно, FA=FB=FC=FD, тогда точка F равноудалена от вершин основания, значит, является центром описанной около основания окружности.

Рассмотрим сечение пирамиды и шара плоскостью AMC. Точка O — центр шара, $O \in MF$.

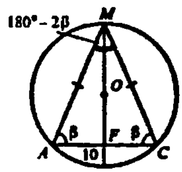


Из теоремы синусов в треугольнике AMC:

$\frac{AC}{\sin(180^\circ - 2\beta)} = 2R$, где R — радиус шара.

$R = \frac{10}{2\sin 2\beta} = \frac{5}{\sin 2\beta}$. Площадь поверхности шара:

$S = 4\pi R^2 = \frac{4\pi \cdot 25}{\sin^2 2\beta} = \frac{100\pi}{\sin^2 2\beta}$ см^2.



Объем шара: $V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{125}{\sin^3 2\beta} = \frac{500\pi}{3\sin^3 2\beta}$ см^3.

761. OA=1,5 м, MO=0,5 м, AD=l.

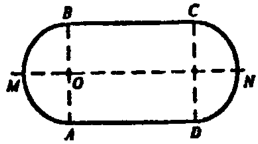
$V_{цист} = 50$ м^3; $V_{цил} = \pi r^2 l = \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot l$ м^3.

AMB, CND — шаровые сегменты.

$V_{сегм} = \pi h^2 (R - \frac{h}{3})$, где h=MO=0,5 (м), R=OA=1,5 (м).

$V_{сегм} = \pi \cdot 0{,}5^2 (1{,}5 - \frac{0{,}5}{3}) = 0{,}25\,\pi \cdot \frac{4{,}5 - 0{,}5}{3} = \frac{0{,}25\pi}{3} \cdot 4 = \frac{\pi}{3}$ м^3.

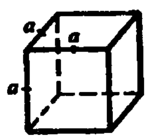
$V_{цист} = V_{цил} + 2V_{сегм}$.



$V_{цист} = 50 = 2{,}25\pi l + \frac{2\pi}{3}$ м^3.

$l = \frac{50 - \frac{2\pi}{3}}{2{,}25\pi} \approx \frac{50 - \frac{2 \cdot 3{,}14}{3}}{2{,}25 \cdot 3{,}14} = \frac{50 - 2{,}09}{7{,}065} = \frac{47{,}91}{7{,}065} \approx 6{,}78$ м.

762. Пусть ребро куба равно a. Площадь поверхности куба равна $6a^2$.



Пусть радиус шара OA=b. Площадь поверхности шара $4\pi b^2$.

Пусть радиус основания цилиндра равен c, тогда AB=H=2c.

$S_{осн} = \pi c^2$; $S_{бок} = 2\pi c \cdot P = 2\pi c \cdot H = 2\pi c \cdot 2c = 4\pi c^2$;

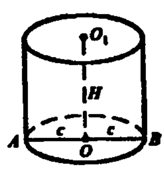
$S_{полн} = 4\pi c^2 + 2\pi c^2 = 6\pi c^2$.

Пусть радиус основания конуса равен d, тогда PO=H=2d.

$S_{осн} = \pi d^2$; $S_{бок} = \pi d \cdot AP$. $AP = \sqrt{d^2 + H^2} = \sqrt{d^2 + 4d^2} = d\sqrt{5}$.

$S_{бок} = \pi \cdot d \cdot d \cdot \sqrt{5} = \pi\sqrt{5}\, d^2$. $S_{полн} = \pi d^2 + \pi\sqrt{5}\, d^2 = \pi d^2(\sqrt{5} + 1)$ (из условия).

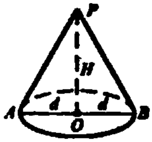
$6a^2 = 4\pi b^2 = 6\pi c^2 = \pi d^2(\sqrt{5} + 1)$.



Выразим a, c и d через b.

$6a^2 = 4\pi b^2$; $a^2 = \frac{4\pi b^2}{6} = \frac{2\pi b^2}{3}$; $a = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \cdot b$ (1)

$6\pi c^2=4\pi b^2$; $c^2=\dfrac{4\pi b^2}{6}=\dfrac{2}{3}b^2$; $c=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ b. (2)



$d^2\cdot\pi(\sqrt{5}+1)=4\pi b^2$;

$d^2=\dfrac{4\pi b^2}{\pi(\sqrt{5}+1)}=\dfrac{4b^2\cdot(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\dfrac{4b^2\cdot(\sqrt{5}-1)}{5-1}=b^2(\sqrt{5}-1)$;

$d=\sqrt{\sqrt{5}-1}\cdot b$.

Объем куба равен a^3; $a^3=\left(\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}}\,b\right)^3=\dfrac{2\pi}{3}\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}}\,b^3$.

Объем шара равен $\dfrac{4}{3}\pi b^3$.

Объем цилиндра равен $\pi c^2\cdot H$;

$\pi c^2\cdot H=\pi\cdot\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,b\right)^2\cdot 2\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot b=\pi\cdot\dfrac{2}{3}b^2\cdot 2\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,b=\pi\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,b^3$.

Объем конуса равен $\dfrac{1}{3}\pi d^2H$;

$\dfrac{1}{3}\pi d^2H=\dfrac{\pi}{3}\cdot b^2(\sqrt{5}-1)\cdot 2\cdot b\sqrt{\sqrt{5}-1}=\dfrac{2\pi}{3}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}-1}\cdot b^3$

Сравним объемы тел. Т.к. все они выражены через радиус шара b, то остается сравнивать коэффициенты при b^3.

$\dfrac{2\pi}{3}\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}}$; $\dfrac{4\pi}{3}$: $\dfrac{4\pi}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $\dfrac{2\pi}{3}(\sqrt{5}-1)^{\frac{3}{2}}$ $\dfrac{2\pi}{3}$ — общий множитель. Следовательно, остаются числа:

$\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}}$; 2; $2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $(\sqrt{5}-1)^{\frac{3}{2}}$ (1) (2) (3) (4)

Сравним числа (1) и (2). $\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}}$ и 2; $\dfrac{2\pi}{3}$ и 4; π и $\dfrac{4\cdot 3}{2}$; π и 6.

Т.к. $\pi<6$, то $\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}}<2$. Т.к. $\sqrt{\dfrac{2}{3}}<1$, то $2\cdot\sqrt{\dfrac{2}{3}}<2$.

Сравним теперь (1) и (3). $\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}}$ и $2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $\dfrac{2\pi}{3}$ и $\dfrac{8}{3}$; π и $\dfrac{8}{3}\cdot\dfrac{3}{2}$; π и 4

Т.к. $\pi<4$, то $\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}}<2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Таким образом, установлено, что $\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}}<2\sqrt{\dfrac{2}{3}}<2$.

Сравним теперь (4) и (1). $(\sqrt{5}-1)^{\frac{3}{2}}$ и $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$: $(\sqrt{5}-1)^3$ и $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3}{2}(\sqrt{5}-1)^3$ и π.

$(\sqrt{5}-1)^3=(5+1-2\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)=(6-2\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)=6\sqrt{5}-6-10+2\sqrt{5}=2(4\sqrt{5}-8)$;

$\frac{3}{2}\cdot 2(4\sqrt{5}-8)=3\cdot 4(\sqrt{5}-2)$, $12(\sqrt{5}-2)$ и π.

$\sqrt{5}\approx 2{,}23$; $\sqrt{5}-2\approx 0{,}23$. $12\cdot 0{,}23=2{,}76$. $2{,}76$ и π.

Т.к. $2{,}76<\pi$, то $(\sqrt{5}-1)^3<\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$.

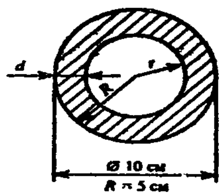
Таким образом, числа расположены в следующем порядке:

$(\sqrt{5}-1)^3<\sqrt{\frac{2\pi}{3}}<2\sqrt{\frac{2}{3}}<2$.

Им соответствует объемы тел: $V_{кон}<V_{куба}<V_{цил}<V_{ш}$.

763. а) $d=2$ мм$=0{,}2$ см; $R=5$ см.

$r=R-d=5-0{,}2=4{,}8$ см.



Объем шара: $V_ш=\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$.

Масса шара: $m_{шара}=\rho_{меди}\cdot V=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$.

$m_ш\approx 8{,}9\cdot\frac{4}{3}\cdot 3{,}14(5^3-4{,}8^3)=8{,}9\cdot 1{,}33\cdot 3{,}14(125-110{,}592)\approx 11{,}837\cdot 3{,}14$.

$14{,}41\approx 37{,}17\cdot 14{,}41\approx 535{,}6$ г.

$$\rho_ш=\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\approx\frac{3\cdot 535{,}6}{4\cdot 3{,}14\cdot 125}=\frac{1606{,}8}{500\cdot 3{,}14}=\frac{1606{,}8}{1570}\approx 1{,}023\text{ г/см}^3$$

Сравним плотность шара $\rho_ш$ и плотность воды, которую примем равной 1 г·см^3

$\rho_ш>\rho_в$, тогда, шар не сможет плавать в воде;

б) $d=1{,}5$ мм$=0{,}15$ см. $r=R-d=5-0{,}15=4{,}85$ (см). $V_ш=\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$.

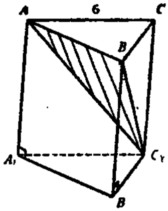
$m_{шара}=\rho_{меди}\cdot V_ш=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$. $m_ш=8{,}9\cdot\frac{4}{3}\cdot 3{,}14\ (125-4{,}85^3)\approx 8{,}9\cdot 1{,}33\cdot 3{,}14$

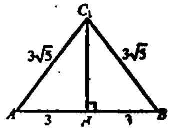
$(125-114{,}09)=11{,}837\cdot 3{,}14\cdot 10{,}91=405{,}50$ г.

$$\rho_ш=\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3\cdot 405{,}50}{4\cdot 3{,}14\cdot 125}=\frac{1216{,}5}{1570}\approx 0{,}77\text{ г/см}^3$$

Если принять $\rho_{воды}=1$ г/см^3, то $\rho_ш<\rho_в$, такой шар будет плавать на поверхности воды.

764 (н).





а) $AB = 6$ см, $AA_1 = 3$ см.

$BC_1 = \sqrt{BB_1^2 + B_1C_1^2} = \sqrt{36+9} = 3\sqrt{5}$ –

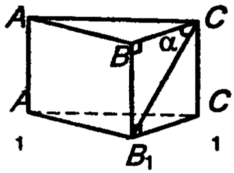
теорема Пифагора.

$AC_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1C_1^2} = 3\sqrt{5}$

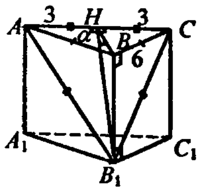
$\triangle AC_1B$ – равнобедренный.

$C_1H = \sqrt{AC_1^2 - AH^2} = \sqrt{45-9} = 6$

$S_{ABC_1} = AH \cdot C_1H = 18$.



б) Т.к. $A_1B_1 \parallel AB$ и прямая A_1B_1 не лежит в плоскости ABC_1 $\Rightarrow$ A_1B_1 параллельна плоскости ABC_1 т.к. она параллельна какой-то прямой, лежащей в плоскости ABC_1.



в) Т.к. $BB_1 \perp$ плоскости ABC, то искомый угол равен $\angle B_1CB$.

$\text{tg}\,\alpha = \frac{BB_1}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\alpha = \text{arctg}\frac{1}{2}$.

г) Т.к. $AB_1 = B_1C$ и $AB = BC$, то $\triangle AB_1C$ – равнобедренный.

Опустим высоту BH в $\triangle ABC$, тогда B_1H – высота в $\triangle AB_1C$ (т.к. $AH = HC$).

Искомый угол равен $\angle BHB_1$.

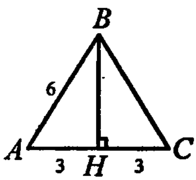
$\text{tg}\angle BHB_1 = \frac{BB_1}{BH}$, т.к. $\triangle B_1BH$ – прямоугольный ($BB_1 \perp ABC$).

$BH^2 = BC^2 - CH^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow BH = 3\sqrt{3}$.

$\text{tg}\angle BHB_1 = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle BHB_1 = 30°$

д) $\overline{BB_1} - \overline{BC} + 2\overline{A_1A} - \overline{C_1C} = -2\overline{C_1C} - \overline{BC} + 2\overline{C_1C} = -\overline{BC}$; $\left|\overline{BC}\right| = 6$

$\overline{C_1C} = \overline{B_1B} = -\overline{BB_1}$; $\overline{A_1A} = \overline{C_1C}$, т.к. $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$.



е) $V_{ABCA_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot BB_1 = 9\sqrt{3} \cdot 3 = 27\sqrt{3}$

$S_{ABC} = 3\sqrt{3} \cdot 3 = 9\sqrt{3}$.

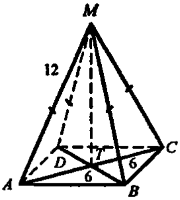
765 (н).

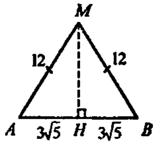
а) $AB = 6\sqrt{2}$, $MA = 12$, $AM = MB = -12$, $S_{бок} = 4S_{AMB}$.

$MH^2 = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$

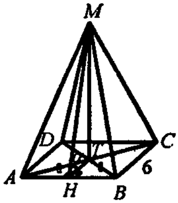
$S_{AMB} = MH \cdot AH = 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{14} = 18\sqrt{7}$

$S_{бок} = 4 \cdot 18\sqrt{7} = 72\sqrt{7}$.





б) Опустим высоту MT на плоскость $ABCD$, т.к. пирамида правильная $MT = \sqrt{AM^2 - AT^2}$. $AT = \dfrac{1}{2}AC$ (т.к. $ABCD$ – квадрат).



$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{72 + 72} = 12$

$AT = 6$, $MT = \sqrt{144 - 36} = 6\sqrt{3}$

$V_{MABCD} = \dfrac{1}{3} S_{ABCD} \cdot MT = \dfrac{1}{3} \cdot 72 \cdot 6\sqrt{3} = 144\sqrt{3}$.

в) Опустим высоту MH в $\triangle AMB$ тогда $\sin\alpha = \dfrac{MT}{MH}$ (т.к. $\triangle MTH$ прямоугольный).

$MT = 6\sqrt{3}$; $MH = 3\sqrt{14}$. $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{21}}$.

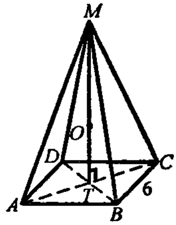
г) Искомый угол равен $\angle MAT$.

$\sin\angle MAT = \dfrac{MT}{AM} = \dfrac{6\sqrt{3}}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle MAT = 60°$.

д) $\left(\overline{AB} + \overline{AD}\right) \cdot \overline{AM} = \overline{AC} \cdot \overline{AM} =$

$= AC \cdot AM \cdot \cos\angle MAC =$

$= 12 \cdot 12 \cdot \dfrac{1}{2} = 72.$

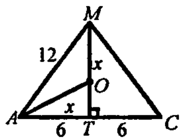


е) Пусть MT высота O – центр описанной сферы. Тогда $O \in MT$ т.к. $MABCD$ – правильная пирамида.

$MO = OA = x$

$AO^2 = OT^2 + AT^2$

$x^2 = \left(6\sqrt{3} - x\right)^2 + 36$, т.к. $MT = 6\sqrt{3}$.



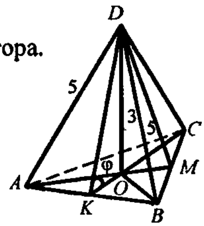
$x^2 = 108 - 12\sqrt{3}x + x^2 + 36$

$12\sqrt{3}x = 144$

$x = \dfrac{12}{\sqrt{3}}$. Значит $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \dfrac{144}{3} = 192\pi$.

766 (н).

а) $DO = 3$, $AD = DB = DC = 5$, $AO = 4$ по теореме Пифагора.

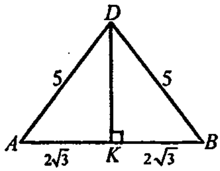


$AO = OB = OC = 4$

$\triangle ABC$ – равносторонний

$AO = 4$ – является радиусом описанной окружности у $\triangle ABC$, для равностороннего $R = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = 4\sqrt{3}$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB - BC \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 48 = 12\sqrt{3}$.



$DK^2 = AD^2 - AK^2 = 25 - 12 = 13.$

$DK = \sqrt{13}$

$S_{ADB} = DK \cdot AK = 2\sqrt{39}$

$S = 3S_{ADB} + S_{ABC} = 12\sqrt{3} + 6\sqrt{39}$

б) $V_{DABC} = \frac{1}{3} DO \cdot S_{ABC} = 12\sqrt{3}$

в) Искомый угол равен $\angle DAO$ $\sin \angle DAO = \frac{DO}{AD} = \frac{3}{5}$

г) Искомый угол равен $\angle DKO$.

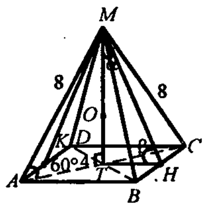
$\sin \angle DKO = \frac{DO}{DK} = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\angle DKO = \arcsin \frac{3}{\sqrt{13}}$

д) $\frac{1}{2}\left(\overline{DB} + \overline{DC}\right)\overline{MA} = \overline{DM} \cdot \overline{MA} = -\sqrt{13} \cdot 8 \cdot \cos \angle DMA = -\sqrt{13} \cdot 8 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{32\sqrt{13}}{5}$.

е) $V_{DABC} = \frac{1}{3} S \cdot r \Rightarrow r = \frac{3V_{DABC}}{S} = \frac{3 \cdot 12\sqrt{3}}{12\sqrt{3} + 6\sqrt{39}} = \frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + \sqrt{39}} = \frac{6}{2 + \sqrt{13}}$.

767 (н).

а) $AM = MB = MC = MD = 8$



$MT = AM \cdot \sin 60 = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$,

где MT – высота пирамиды.

$AT = AM \cdot \cos 60° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$

$BC^2 = TB^2 + TC^2$ – по теореме Пифагора и т.к. пирамида правильная, то $\angle CTB = 90°$, т.е. $BC = 4\sqrt{2}$.

Найдем MH – высота в ΔBMC. TH – высота в ΔTBC, по теореме о трех перпендикулярах и ΔBTC – равнобедренный $\Rightarrow$ $BK = 2\sqrt{2} = CK$.

По теореме Пифагора $TH = 2\sqrt{2} \Rightarrow MH = 2\sqrt{14}$

$S_{бок} = 4 \cdot S_{MBC} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{14} = 32\sqrt{7}$

б) $V=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot MT=\frac{1}{3}4\sqrt{3}\cdot 16\cdot 2=\frac{128\sqrt{3}}{3}$.

в) $MK\perp AD$. Найдем $\angle HMK$:

$\angle\alpha=\angle TMK$, $\sin\alpha=\frac{TH}{MH}=\frac{\sqrt{7}}{7}\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{\frac{6}{7}}$;

$\sin 2\alpha=\sin\angle HMK=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{7}$; $\cos 2\alpha=\frac{5}{7}$;

$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2}{5}\sqrt{6}\Rightarrow\angle HMK=\mathrm{arctg}\frac{2}{5}\sqrt{6}$.

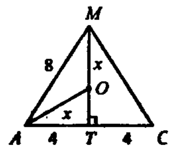
г) $\beta=\angle MHT$.

$\mathrm{tg}\,\beta=\frac{MT}{TH}=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{6}\Rightarrow\beta=\mathrm{arctg}\sqrt{6}$.

д) $\frac{1}{2}\left(\overline{MB}+\overline{MD}\right)\cdot\overline{MK}=\frac{1}{2}2\overline{MT}\cdot\overline{MK}=\overline{MT}\cdot\overline{MK}$ (по правилу параллелограмма);

$\overline{MT}\cdot\overline{MK}=MT\cdot MK\cdot\cos\angle\alpha=4\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{14}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{4}}=16\cdot 3=48$.

е) O – центр описанной сферы.



Тогда $O\in MT$ т.к. $MACD$ – правильная пирамида.

$MO=OA=x$

$AO^2=OT^2+AT^2$;

$x^2=\left(4\sqrt{3}-x\right)^2+16$;

$x^2=48-8\sqrt{3}x+x^2+16$;

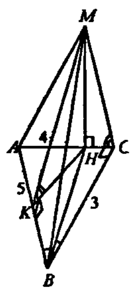
$x=\frac{64}{8\sqrt{3}}=\frac{8}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см.

768 (н).

Плоскость $AMC\perp$ плоскости $ABC\Rightarrow MH$ – высота пирамиды принадлежит плоскости AMC Из теоремы о трех перпендикулярах $MC\perp CB$.

$\Delta CHM=\Delta KHM$ (по стороне и прилежащим к ней углам).

Тогда $\Delta CMB=\Delta KMB$ (по гипотенузе и катету).



$KM=CM$, MB – общая.

Тогда, BH – биссектриса ΔABC, т.е.

$\frac{AH}{AB}=\frac{CH}{CB}\Rightarrow\ CH=\frac{3}{2},\ AH=\frac{5}{2}$.

$V_{MHCB}=\frac{1}{3}CH\cdot 3\sqrt{2}\cdot 4\ MC=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}3\sqrt{2}\cdot 4MC$.

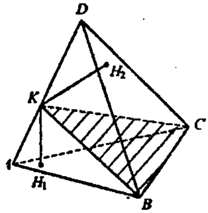
$V_{MHCB}=\frac{1}{3}MH\cdot S_{BHC}=\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3}MH$.

Из теоремы Пифагора для ΔMCH .

$$\begin{cases} MH^2 + CH^2 = MC^2 \\ 6\sqrt{2}MC = \frac{3}{4}MH \end{cases} \Rightarrow MH = \frac{3}{2}, MC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Тогда $S_{BMC} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$; $S_{AMB} = \frac{15\sqrt{2}}{4} \Rightarrow S_{\text{бок пов}} = 3\left(1+2\sqrt{2}\right)$ $S_{AMC} = 3$

771 (н).



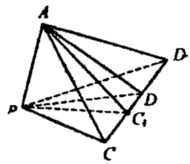
Опустим из точки K высоты KH_1 и KH_2 на грани ABC и DBC. Т.к. KBC делит двугранный угол между плоскостями ABC и DBC пополам, то $KH_1 = KH_2$.

$$\frac{V_{AKBC}}{V_{DKBC}} = \frac{\frac{1}{3}KH_1 \cdot S_{ABC}}{\frac{1}{3}KH_2 \cdot S_{DBC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{DBC}},$$

но $$\frac{V_{AKBC}}{V_{DKBC}} = \frac{\frac{1}{3}h_1 \cdot S_{BKC}}{\frac{1}{3}h_2 \cdot S_{BKC}} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{AK}{KD}$$

h_1 и h_2 – высоты, опущенные из точек A и D на плоскость $BKC \Rightarrow \frac{AK}{KD} = \frac{S_{ABC}}{S_{DBC}}$.

784 (н).

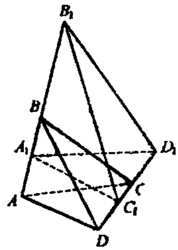


Пусть AB – неподвижен, CD переместился в C_1D_1, тогда

$V_{ABCD} - V_{ABC_1D_1} = V_{ABCC_1} - V_{ABDD_1} = 0$,

т.к. $V_{ABCC_1} = \frac{1}{3}H \cdot S_{BC_1C} = \frac{1}{3}H \cdot S_{BDD_1} = V_{ABDD_1}$,

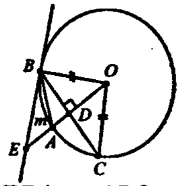
т.к. $S_{BCC_1} = S_{BDD_1}$, т.к. $CC_1 = DD_1$ $(CD = C_1D_1)$.



Аналогично, если CD фиксировано, а AB – переместится в A_1B_1 Если $AB \to A_1B_1$ и $CD \to C_1D_1$, то представим это как $AB \to A_1B_1$, при фиксированном CD, потом $CD \to C_1D_1$ при фиксированном A_1B_1 $\Rightarrow$ получаем: $V_{ABCD} = V_{A_1B_1CD}$.

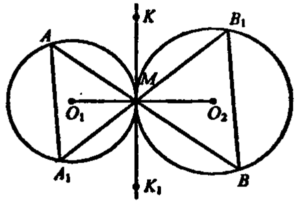
$V_{A_1B_1CD} = V_{A_1B_1C_1D} \Rightarrow V_{ABCD} = V_{A_1B_1C_1D_1}$, что и требовалось доказать.

816 (н).



$\angle EBA = \frac{1}{2} \cup BMA = \frac{1}{2} \angle AOB$. Т.к. $\angle EBA$ – угол между касательной и хордой, $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \angle BOA$ (т.к. OD – биссектриса в ΔBOC – равнобедренный) $\Rightarrow$ $\angle EBA = \angle ABC$.

817 (н).

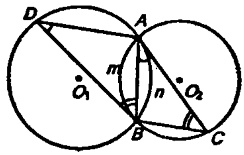


Проведем прямую MK, общую касательную к окружностям $\angle KMB_1 = \frac{1}{2} \cup MB_1 = \angle MBB_1$ (угол между касательной и хордой).

$\angle KMB_1 = \angle A_1MK_1$ = (как вертикальный угол) $= \frac{1}{2} \cup A_1M = \angle A_1AM \Rightarrow \angle A_1AM = \angle MBB_1$,

значит $AA_1 \parallel BB_1$, т.к. накрестлежащие углы равны.

818 (н).



а) $\angle DBA = \frac{1}{2} \cup AmB = \angle BCA$

$\angle CAB = \frac{1}{2} \cup AnB = \angle ADB$

(т.к. $\angle DBA$ и $\angle CAB$ – углы между касательными и хордами).

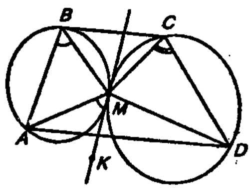
$\angle DAB = 180° - \angle ADB - \angle DBA = \angle ABC \Rightarrow AD \parallel BC$, т.к. $\angle DAB = \angle ABC$ как накрестлежащие углы.

б) $\Delta DAB \sim \Delta ABC$ по первому признаку подобия треугольников.

$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot BC$.

в) Т.к. $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{AB} = \frac{AC}{BD} \Rightarrow \frac{BD^2}{AC^2} = \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{BC \cdot AD}{BC^2} = \frac{AD}{BC}$.

819 (н).

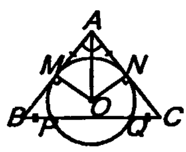


Проведем через точку M касательную к окружности, описанной около ΔABM, тогда

$\angle AMK = \frac{1}{2} \cup AM = \angle ABM$. Значит

$\angle KMD = \angle MCD \Rightarrow KM$ является касательной к окружности, описанной около ΔCMD.

820 (н).



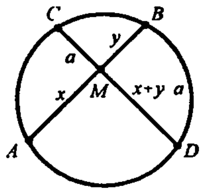
По теореме о касательной и секущей имеем $CN^2 = CQ \cdot CP$ и $BM^2 = BP \cdot BQ$

$\Rightarrow$ $CN = BM$ но $AM = AN$

т.к. $\Delta OAM = \Delta OAN$ ($OM = ON$ и OA – общая гипотенуза)

$\Rightarrow AB = AM + BM = AN + NC = AC \Rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный.

821 (н).



Обозначим $AM = x$, $BM = y$, $CM = a$, $MD = x + y - a$,

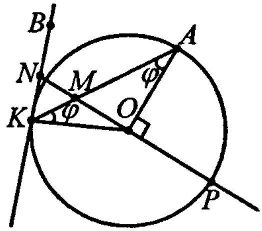
т.к. $AB = CD$, $CM{\cdot}MD = BM{\cdot}MA$; $a(x + y - a) = xy$;

$ax + ay - a^2 - xy = 0$; $x(a - y) + a(y - a) = 0$;

$(x - a)(a - y) = 0 \Rightarrow a = x$ или $a = y$, т.е. $CM = MA$ или $CM = MB$, тогда $BM = MD$ или $AM = MD$,

что и требовалось доказать.

822 (н).



$AK \cap ON = M$. Обозначим $\angle MKO = \varphi$, тогда

$\angle NKM = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$. Т.к. $OK \perp KB$,

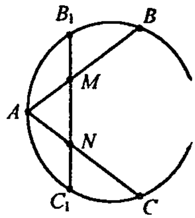
$\angle KAO = \varphi$, т.к. ΔKOA – равнобедренный.

Значит $\angle AMO = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$ (ΔMOA – прямоугольный),

но $\angle AMO = \angle NMK$ (как вертикальный угол). Поэтому

$\angle NMK = \dfrac{\pi}{2} - \varphi = \angle NKM \Rightarrow NK = NM$ (т.к. ΔKNM – равнобедренный)

823 (н).



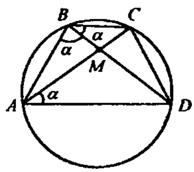
$\angle AMC_1 = \dfrac{1}{2}\cup BB_1 + \dfrac{1}{2}\cup AC_1$;

$\angle ANB_1 = \dfrac{1}{2}\cup CC_1 + \dfrac{1}{2}\cup AB_1$,

но $\cup AB_1 = \cup B_1B$ и $\cup AC_1 = \cup C_1C$.

Значит $\angle AMC_1 = \angle ANB_1 \Rightarrow \Delta MAN$ – равнобедренный $\Rightarrow AM = AN$

824 (н).



$\angle DBC = \angle DAC$,

т.к. они опираются на одну и ту же дугу

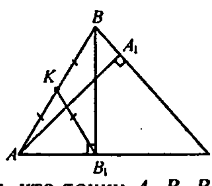
$\angle AMD = 180° - \alpha - \angle ADB$;

$\angle BAD = 180° - \alpha - \angle ADB \Rightarrow \angle AMD = \angle BAD$

825 (н).

Здесь допущена какая-то опечатка, т.к. AB никак не может быть биссектрисой $\angle BAE$

826 (н).



Возьмем точку K. K – середина AB

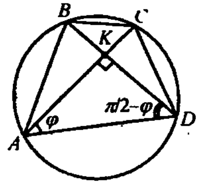
$KB_1 = KA = KB$ т.к. ΔAB_1B – прямоугольный,

т.к. у прямоугольного треугольника центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы.

Аналогично для ΔAA_1B, $KA_1 = KA = KB$. Получаем, что точки A, B, B_1, A_1 лежат на окружности, центр которой находится в точке K

827 (н).

Обозначим $\angle CAD = \varphi$, тогда $\angle BDA = \frac{\pi}{2} - \varphi$



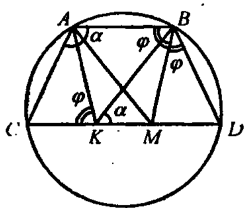
по теореме синусов для ΔCAD имеем $\frac{CD}{\sin\varphi} = 2R$

$\frac{AB}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = 2R$ (теорема синусов для ΔBAD).

$AB = 2R\cos\varphi$, $CD = 2R\sin\varphi \Rightarrow \boxed{AB^2 + CD^2 = 4R^2}$

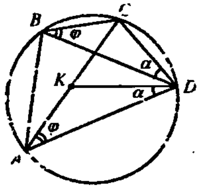
но $AB^2 + CD^2 = BK^2 + AK^2 + CK^2 + KD^2 = (BK^2 + CK^2) + (AK^2 + KD^2) =$
$= \boxed{BC^2 + AD^2 = 4R^2}$ (по теореме Пифагора)

828 (н).



Пусть K – точка пересечения окружности, описанной около ΔAMB и прямой CD.
Обозначим $\angle CAM = \angle MAB = \alpha$,
$\angle ABM = MBD = \varphi$. $\angle ABM + \angle AKM = 180°$
(т.к. $AKMB$ – вписанный четырехугольник).
Значит $\angle CKA = 180° - \angle AKM = \varphi$.
$\angle ACD = 180° - \angle ABD = 180° - 2\varphi$ ($ABCD$ – вписанный четырехугольник).
Отсюда получаем в ΔACK
$\angle CAK = 180° - \angle ACK - \angle CKA = 180° - 180° + 2\varphi - \varphi = \varphi$.
Значит ΔACK – равнобедренный $\Rightarrow \boxed{AC = CK}$
$\angle BKM = \angle MAB = \alpha$ (т.к. они опираются на одну и ту же дугу).
$\angle CDB = 180° - \angle CAB = 180° - 2\alpha$. В ΔBKM имеем
$\angle KBD = 180° - \angle BKD - \angle KDB = 180° - \alpha - 180° + 2\alpha = \alpha$.
Значит ΔKDB – равнобедренный $\boxed{KD = BD} \Rightarrow CD = CK + KD = AC + BD$.
Что и требовалось доказать.

829 (н).



Отметим на диагонали AC точку K такую, что $\angle ADK = \angle BDC$, тогда $\Delta AKD \sim \Delta BCD$ по первому признаку подобия треугольников ($\angle CAD = \angle CBD$ т.к. они опираются на одну и ту же дугу)

$\angle ADK = \angle BDC$; $\frac{AK}{BC} = \frac{AD}{BD}$ Далее $\Delta CKD \sim \Delta BAD$ по первому признаку подобия Δ $\angle CKD = \alpha + \varphi$ как внешний угол у ΔAKD

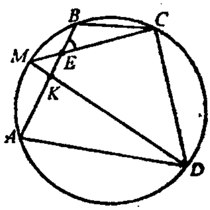
$\angle BAD = 180° - \angle BCD = 180° - 180° + \alpha + \varphi = \alpha + \varphi$.

$\angle CKD = \angle BAD$ и $\angle ACD = \angle ABD$ (они опираются на одну и ту же дугу).

$\frac{KC}{AB} = \frac{CD}{BD}$ $AC = KC + AK = BC\frac{AD}{BD} + AB\frac{CD}{BD} = \frac{BC \cdot AD + AB \cdot CD}{BD} \Rightarrow$

$AC \cdot BD = BC \cdot AD + AB \cdot CD$.

830 (н).



$$\angle BEC = \frac{1}{2}\cup BC + \frac{1}{2}\cup MA$$

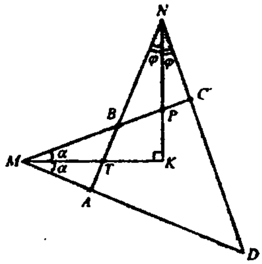
$$\angle MDC = \frac{1}{2}\cup MB + \frac{1}{2}\cup BC = \frac{1}{2}\cup BC + \frac{1}{2}\cup MA = \angle BEC$$

$\angle BEC = \angle MEA$ (как вертикальные углы) $\Rightarrow$

$\angle MEA = \angle MDC \Rightarrow \angle KEC + \angle MDC = 180°$

Значит четырехугольник $CDKE$ – вписанный.

831 (н).



1) Пусть $MK \perp NK$.

Обозначим

$\angle CMK = \angle KMD = \alpha$, $\angle MPK = 90° - \alpha = \angle NPC$,

$\angle ANK = \angle KND = \varphi$,

$\angle NCP = 180° - \varphi - 90° + \alpha = 90° + \alpha - \varphi \Rightarrow$

$\angle BCD = 90° - \alpha + \varphi$; $\angle NTK = 90° - \varphi = \angle MTA$,

$\angle MAT = 180° - \alpha - 90° + \varphi = 90° - \alpha + \varphi$,

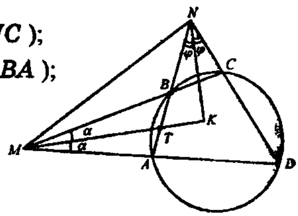
$\angle BAD = 180° - \angle MAT = 90° - \varphi + \alpha \Rightarrow$

$\angle BAD + \angle BCD = 90° - \varphi + \alpha + 90° - \alpha + \varphi = 180°$, т.е. четырехугольник $ABCD$ вписанный.

2) Пусть обратно четырехугольник $ABCD$ – вписанный.

$\angle MKN = 180° - \alpha - \varphi - (\angle MNB + \angle NMB) =$

$= 180° - \alpha - \varphi - (180° - \angle ABC) = \angle ABC - \alpha - \varphi$



$\angle ABC = 2\varphi + \angle BCN$ (как внешний угол у ΔBNC);

$\angle ABC = 2\alpha + \angle BAM$ (как внешний угол у ΔMBA);

$\angle BAM = 180° - \angle BCN$ (т.к. $ABCD$ – вписанный четырехугольник).

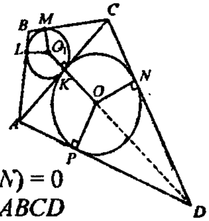
$2\varphi + \angle BCN = 2\alpha + 180° - \angle BCN$;

$\angle BCN = \alpha - \varphi + 90°$;

$\angle ABC = 2\varphi + \angle BCN = \alpha + \varphi + 90°$. Значит $\angle MKN = \angle ABC - \alpha - \varphi = 90°$

Что и требовалось доказать.

832 (н).



Найдем разность $BC + AD - AB - CD = X$.

$X = BM + MC + AP + PD - BL - AL - CN - DN$

Т к. $PD = DN$ ($\angle DOP = \angle DON$),

$CN = CK = CM$, $BM = BL$, $AP = AK = AL$.

Значит $X = (BM - BL) + (MC - CN) + (AP - AL) + (PD - DN) = 0$

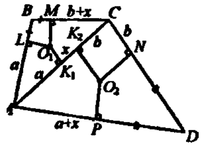
Т.е. $AB + CD = BC + AD$, значит в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

2) Теперь наоборот, пусть в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

Обозначим $K_1K_2 = X$;

$AL = AK_1 = a$; $CK_2 = CN = b$, тогда $CM = CK = b + x$, $AP = AK_2 = a + x$

(Мы предполагаем, что $K_1 \neq K_2$) т.е. что точки касания не совпадают.

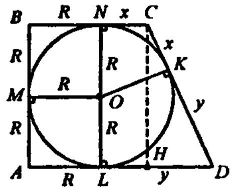


$AB + CD - BC - AD = 0$;

$a + b - b - x - a - x = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Значит $K_1 = K_2$, т.е. окружности, вписанные в ΔABC и ΔACD, касаются диагонали AC в одной и той же точке.

833 (н).



Обозначим $OM = ON = OL = R$;

$CN = CK = x$, $DL = KD = y$;

$OMBN$ – квадрат; $OMAL$ – квадрат.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 2R(R + x + R + y) = R(2R + x + y).$$

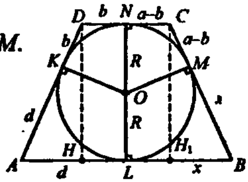
Опустим высоту CH, по теореме Пифагора

$4R^2 + (y - x)^2 = (y + x)^2$;

$4R^2 + y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + 2xy + y^2$; $xy = R^2$;

$S_{ABRD} = R(2R + x + y) = R^2 + Rx + Ry + R^2 = xy + Rx + Ry + R^2 = (R + x)(R + y) = BC \cdot AD$. Что и требовалось доказать.

834 (н).



Обозначим $OL = ON = R$, $BL = BM - x$, $CN = a - b = CM$.

Опустим высоту DH.

$DH^2 + AH^2 = AD^2$

$4R^2 + (d - b)^2 = (b + d)^2$

$4R^2 = 4bd$; $R = \sqrt{bd}$.

Опустим высоту CH_1 по теореме Пифагора: $BH_1^2 + CH_1^2 = BC^2$.

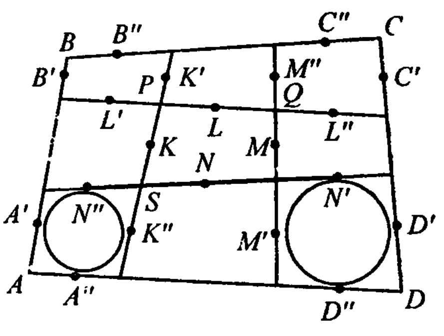
$(x - a + b)^2 + 4R^2 = (a - b + x)^2$

$$\cancel{x^2 + a^2 + b^2} - 2ax + 2bx - \cancel{2ab} + 4bd = \cancel{a^2 + b^2 + x^2} - \cancel{2ab} - 2bx + 2ax$$

$$4bd = 4ax - 4bx \Rightarrow x = \frac{bd}{a - b};$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} 2R \cdot (a + d + x) = \sqrt{bd}\left(a + d + \frac{bd}{a - b}\right).$$

835 (н).



Найдем разность $AB+CD-BC-AD=A'B'+C'D'-B''C''-A''D''$, т.к $BB'=BB''$, $CC'=CC''$ и т.д. из свойств касательных.

$$\begin{cases} A''D''=N''N' \\ B''C''=L'L'' \\ B'A'=K'K'' \\ C'D'=M''M' \end{cases}$$ – из свойств касательных к 2 окружностям.

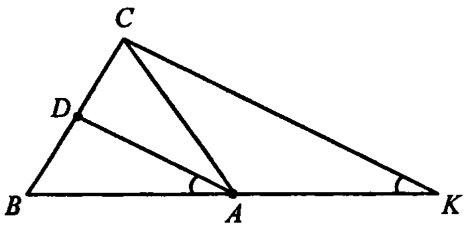
Тогда наша разность равна:

$K'K''+M'M''-L'L''-N'N''=0$

Т.к. $$\left.\begin{array}{l} LL''=KK' \\ LL''=MM'' \\ NN''=KK'' \\ MM'=NN' \end{array}\right\}$$ из свойств касательных.

Значит $AB+CD=BC+AD \Rightarrow$ по теореме об описанном четырехугольнике, в $ABCD$ можно вписать окружность.

836 (н).



Отметим на прямой BA точку K такую, что $CK \parallel AD$.

$\triangle DBA \sim \triangle CBK$ по 1-му признаку подобия $\triangle$.

($\angle B$ – общий, $\boxed{\angle BAD=\angle BKC}$ как соответственные углы).

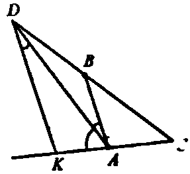
$$\frac{BC}{BD}=\frac{BK}{AB};\ 1+\frac{CD}{BD}=1+\frac{AK}{AB} \Rightarrow$$

$$\frac{CD}{BD}=\frac{AK}{AB}$$ но по условию $$\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB} \Rightarrow AK=AC$$

Т.е. ΔCAK – равнобедренный, $\boxed{\angle AKC=\angle ACK}$, но $\boxed{\angle ACK=\angle CAD}$ (как накрестлежащие углы).

Значит $\angle CAD=\angle BAD$, т.е. AD – биссектриса.

837 (н).



Отметим на прямой AC точку K такую, что $DK \parallel AB$.

$\angle BAD=\angle ADK$ (как накрестлежащие углы).

$\Delta BCA \sim \Delta DCK$ по 1-му признаку подобия Δ

($\angle C$ – общий $\angle BAC=\angle DKC$ как соответственные).

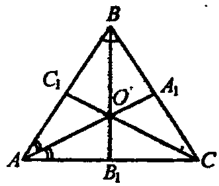
$$\frac{DC}{BC}=\frac{KC}{AC}=\frac{DK}{AB};\ \frac{AK+AC}{AC}=\frac{AK}{AB}\Rightarrow AK=\frac{AB\cdot AC}{AC-AB}.$$

$$\frac{AK}{AC}=\frac{BD}{BC}\Rightarrow\frac{AB}{AC-AB}=\frac{BD}{BC}.$$

$$AB\cdot BC=BD\cdot AC-AB\cdot BD\Rightarrow BD\cdot AC=AB\cdot CD\Rightarrow\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{AC}.$$

Что и требовалось доказать.

838 (н).



а) $\frac{AO}{OA_1}=\frac{AB}{BA_1}$ по 836 номеру.

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}\Rightarrow\frac{BA_1}{a-BA_1}=\frac{c}{b}\Rightarrow BA_1=\frac{ac}{b+c}.$$

Значит $\frac{AO}{OA_1}=\frac{b+c}{a}$.

Аналогично находим $\frac{BO}{OB_1}=\frac{BC}{B_1C}=\frac{a+c}{b}$ и $\frac{CO}{OC_1}=\frac{AC}{AC_1}=\frac{d+b}{c}$.

б) $\frac{AO}{OA}=\frac{b+c}{a}$. $\frac{AO}{AA_1}=\frac{AO}{AO+OA_1}=\frac{AO}{AO+\frac{a\cdot AO}{b+c}}=\frac{b+c}{a+b+c}$.

Аналогично,

$$\frac{BO}{BB}=\frac{a+c}{a+b+c}\text{ и }\frac{CO}{CC_1}=\frac{a+b}{a+b+c}\Rightarrow$$

$$\frac{AO}{AA}+\frac{BO}{BB_1}+\frac{CO}{CC_1}=\frac{b+c+a+c+a+b}{a+b+c}=2.$$

$$\frac{OA_1}{AA}=\frac{OA_1}{OA_1+OA}=\frac{OA_1}{OA_1+\frac{b+c}{a}OA_1}=\frac{a}{b+c+a}.$$

Аналогично находим

$$\frac{OB_1}{BB_1}=\frac{OB_1}{OB_1+BO}=\frac{b}{a+b+c}$$

$$\frac{OC_1}{CC}=\frac{c}{a+b+c}\Rightarrow\frac{OB_1}{BB_1}+\frac{OC_1}{CC_1}+\frac{OA_1}{AA_1}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$$

в) Допустим $\frac{AO}{OA_1}=1$, $\frac{AO}{OA_1}=\frac{b+c}{a}=1\Rightarrow a=b+c$,

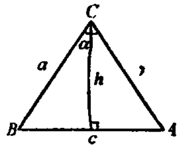
но это противоречит неравенству треугольника, $a<b+c$.

Ответ не может

Пусть $\frac{AO}{OA_1}=2=\frac{b+c}{a}\Rightarrow a=\frac{b+c}{2}$

839 (н).

Обозначим $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$.

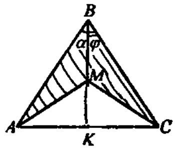


$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}hc \text{. } ab\sin\alpha = hc \text{.}$$

$$\frac{c}{\sin\alpha} = 2R$$ (из теоремы синусов).

$\boxed{ab = h \cdot 2R}$. Что и требовалось доказать.

840 (н).



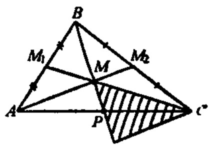
Обозначим $\angle ABK = \alpha$, $\angle KBC = \varphi$.

$$S_{ABM} = \frac{1}{2}AB \cdot BM\sin\alpha = \frac{1}{2}BC \cdot BM \cdot \sin\varphi \text{.}$$

$AB\sin\alpha = BC\sin\varphi$, тогда $S_{ABK} = S_{BKC}$, но $S_{ABK} = \frac{1}{2}h \cdot AK$,

$S_{BKC} = \frac{1}{2}h \cdot KC \Rightarrow AK = KC$. Т.е. точка M лежит на медиане BK.

841 (н).

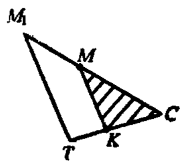


На медиане BP отметим точку K такую, что $MP = PK$, тогда $KC = AM$ т.к. $\Delta APM = \Delta CPK$ по 1-му признаку равенства Δ. $PC = AP$, $MP = PK$, $\angle APM = \angle CPK$. Т.к. в Δ точкой пересечения делятся 2:1 считая от вершины, то $\frac{BM}{MP} = 2$, $\frac{CM}{MM_1} = 2$, $\frac{AM}{MM_2} = 2$.

Значит у ΔCMK стороны равны $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$. Т.е. из медиан ΔABC можно построить Δ. Т.к. $MP = PK$, то $S_{CMK} = 2S_{CMP}$ (т.к. у ΔCMP и ΔCPK общая высота).

$S_{BMC} = 2S_{CMP}$ т.к. $\frac{BM}{MP} = 2$. $S_{BMC} = S_{CMK}$, $S_{ABP} = S_{BPC}$ (т.к. $AP = PC$ у этих Δ общая высота). $S_{ABC} = 2S_{BPC} = 6S_{MPC} = 3S_{CMK}$.

Но стороны ΔCMK равны $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$.



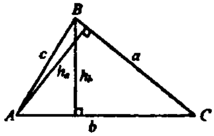
Пусть $M_1T \parallel MK$, тогда $CM_1 = m_c$, $CT = m_a$, $M_1T = m_b$.

Т.к. они подобны и $CM = \frac{2}{3}m_c$.

$\frac{S_{CMK}}{S_{CM_1T}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Т.к. отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. $\frac{S_{ABC}}{S_{CM_1T}} = \frac{3S_{CMK}}{\frac{9S_{CMK}}{4}} = \frac{4}{3}$.

Ответ: $4/3$.

842 (н).



Пусть $h_a = 4$, $h_b = 3$, $h_c = 6$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}h_a a = \frac{1}{2}h_b b = \frac{1}{2}h_c c$$

$4a = 3b = 6c.$

$$\boxed{c = \frac{2}{3}a},\ \boxed{b = \frac{4}{3}a},\ p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{4}{3}a + \frac{2}{3}a\right) = \frac{3a}{2}$$

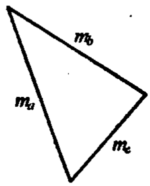
$$p - a = \frac{a}{2},\ p - b = \frac{3a}{2} - \frac{4}{3}a = \frac{a}{6},\ p - c = \frac{3a}{2} - \frac{2}{3}a = \frac{5a}{6};$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{6} \cdot \frac{5a}{6}} = \frac{a^2}{6}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}h_a\ a = 2a,\ \text{значит}\ 2a = \frac{a^2}{6}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}};$$

$$S_{ABC} = \frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\ a = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

843 (н).



$m_a = 9$, $m_b = 12$, $m_c = 15$.

Найдем площадь треугольника составленного из медиан исходного Δ.

$$p = (9 + 12 + 15)\frac{1}{2} = 18;$$

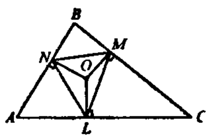
$p - m_a = 9, p - m_b = 6, p - m_c = 3.$

$$S_{m_a m_b m_c} = \sqrt{p(p-m_a)(p-m_b)(p-m_c)} = \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = 54$$

$\frac{S_{ABC}}{S_{m_a m_b m_c}} = \frac{4}{3}$ по задаче 841. $S_{ABC} = \frac{4}{3} \cdot 54 = 72$.

Ответ: 72.

844 (н).



$ON = OM = OL = r$, $\angle NOL = 180° - \angle A$,

$\angle MOL = 180° - \angle C$, $\angle NOM = 180° - \angle B$.

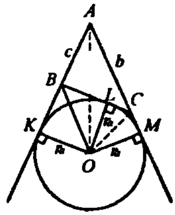
$$S_{MNL} = S_{NOL} + S_{NOM} + S_{MOL} = \frac{1}{2}r^2(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(a + b + c)r = Rr(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$\left.\begin{aligned} a &= 2R\sin A \\ b &= 2R\sin B \\ C &= 2R\sin C \end{aligned}\right\}\ \text{теорема синусов}$$

$\frac{S_{ABC}}{S_{MNL}} = \frac{2R}{r}$ Что и требовалось доказать

845 (н).



Обозначим $BK = BL = x$, $LC = CM = a - x$, $AK = AM$ (т.к. они касательные).

$AK = c + x$, $AM = b + a - x$, $c + x = b + a - x \Rightarrow$

$$x = \frac{b+a-c}{2} = p - c.$$

$AK = c + x = p - c + c = p$, p – полупериметр.

$$S_{AKOM} = S_{AOK} + S_{AOM} = \frac{1}{2}r_a p + \frac{1}{2}r_a p = r_a p$$

$S_{OKBCM} = S_{OKB} + S_{BOL} + S_{OLC} + S_{OCM} = r_a x + r_a(a - x) = r_a a.$

$S_{ABC} = S_{AKOM} - S_{OKBCM} = r_a p - r_a a = r_a(p - a).$

Что и требовалось доказать.

б) Аналогично находим

$S_{ABC} = r_b(p - b) = r_c(p - c) = r_a(p - a) = rp$

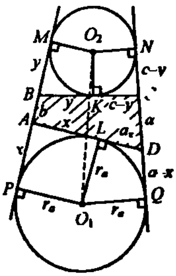
r – радиус вписанной окружности.

$$p - a = \frac{S_{ABC}}{r_a},\ p - b = \frac{S_{ABC}}{r_b},\ p - c = \frac{S_{ABC}}{r_c},\ r = \frac{S_{ABC}}{p}.$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \text{по формуле Герона} =$$

$$= \sqrt{\frac{S_{ABC} \cdot S_{ABC} \cdot S_{ABC} \cdot S_{ABC}}{r_a r_b r_c r}} = \frac{S^2_{ABC}}{\sqrt{r_a r_b r_c r}} \Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{r_a r_b r_c r}$$

846 (н).



Введем обозначения $AL = AP = x$, $DL = DQ = a - x$, $BK = BM = y$, $KC = CN = c - y$.

$MP = NQ$ (т.к. общие касательные к окружностям)

$x + b + y = a - x + d + c - y$

$$x + y = \frac{a+d+c-b}{2} = p - b$$

Значит $MP = x + y + b = p - b + p = p$.

$$S_{O_1PMO_2NQ} = S_{O_1PMO_2} + S_{O_1O_2NQ} = \frac{1}{2}MP(r_a + r_c) + \frac{1}{2}NQ(r_a + r_c) = p(r_a + r_c)$$

(т.к. O_1PMO_2 и O_1O_2NQ – трапеции).

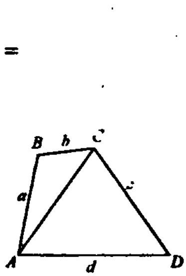
$$S_{O_1PADQ} = r_a x + r_a(a - x) = r_a \cdot a$$

$$S_{BMO_2NC} = r_c y + r_c(c - y) = r_c \cdot c$$

$$S_{ABCD} = S_{O_1PMO_2NQ} - S_{O_1PADQ} - S_{BMO_2NC} = p(r_a + r_c) - r_a \cdot a - r_c \cdot c =$$

$= r_a(p - a) + r_c(p - c).$

847 (н).



$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$ $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin B$; $S_{ACD} = \frac{1}{2}cd\sin D$,

$$S = \frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin D;$$

$$S^2=\frac{1}{4}\left(a^2b^2\sin^2 B+c^2d^2\sin^2 D+2abcd\sin B\sin D\right);$$

$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 - 2cd\cos D$ (по теореме косинусов);

$$ab\cos B=\frac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2}-cd\cos D;$$

$$S^2=\frac{1}{4}\left(a^2b^2-a^2b^2\cos^2 B+c^2d^2\sin^2 d+2abcd\sin B\sin D\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(a^2b^2-\frac{\left(c^2+d^2-a^2-b^2\right)^2}{4}-c^2d^2\cos^2 D+\right.$$

$$\left.+cd\cos D\left(c^2+d^2-a^2-b^2\right)+2abcd\sin B\sin D\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{4a^2b^2+4c^2d^2-\left(c^2+d^2-a^2-b^2\right)^2}{4}-2c^2d^2\cos^2 D+\right.$$

$$\left.+cd\cos D\left(2cd\cos D-2ab\cos B\right)+2abcd\sin B\sin D\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{4a^2b^2+4c^2d^2-\left(c^2+d^2-a^2-b^2\right)^2}{4}-2c^2d^2\cos^2 D+\right.$$

$$\left.+2c^2d^2\cos^2 D-2abcd\cos B\cos D+2abc\sin B\sin D\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{4a^2b^2+4c^2d^2-\left(c^2+d^2-a^2-b^2\right)^2}{4}-2abcd\cos(B+D)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{4a^2b^2+4c^2d^2-\left(c^2+d^2-a^2-b^2\right)^2}{4}+2abcd-4abcd\cos^2\frac{(B+D)}{2}\right)=$$

т к $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{(2ab+2cd)^2-\left(c^2d^2-a^2-b^2\right)^2}{4}-4abcd\cos^2\frac{B+D}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\left(2ab+2cd-c^2-d^2+a^2+b^2\right)\left(2ab+2cd+c^2+d^2-a^2-b^2\right)}{4}-\right.$$

$$\left.-4abcd\cos^2\frac{B+D}{2}\right)=$$ (по формуле $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$) $=$

$$=\left(\frac{(a+b+d-c)(a+b+c-d)(c+d-a+b)(c+d+a-b)}{16}\right)-$$

$$-abcd\cos^2\frac{B+D}{2}=(p-c)(p-d)(p-a)(p-b)-abcd\cos^2\frac{B+D}{2}.$$

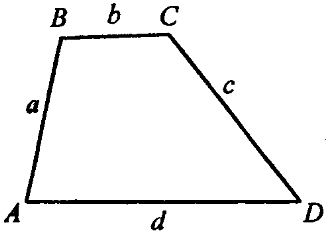
$p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ – полупериметр.

Что и требовалось доказать.

б) Если $ABCD$ – вписанный четырехугольник, то $\angle B+\angle D=180^\circ$ $\Rightarrow$ $\cos\dfrac{B+D}{2}=\cos 90^\circ=0$, т.е. $S=\sqrt{(p+a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

Что и требовалось доказать.

848 (н).



$$S_{ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{B+D}{2}}$$

$b+d=a+c$

$p=\dfrac{a+b+c+d}{2}=a+c=b+d$;

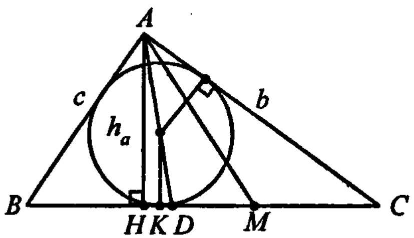
$p-a=c, p-b=d, p-c=a, p-d=b$

$$S_{ABCD}=\sqrt{abcd-abcd\cos^2\frac{B+D}{2}}=\sqrt{abcd}\sin\frac{B+D}{2}.$$

б) Если $ABCD$ – еще и вписанный четырехугольник, то $B+D=180^\circ$, $\sin\dfrac{B+D}{2}=\sin 90^\circ=1$.

$S_{ABCD}=\sqrt{abcd}$.

849 (н).



Пусть $b>c$.

$BC=a, AB=c, AC=b$.

$$MK = KC - \frac{a}{2} = p - c - \frac{a}{2} = \frac{a+b-c}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-c}{2}$$

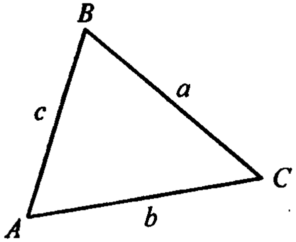
$BD = \dfrac{ac}{b+c}$ по свойству биссектрисы.

$$CD = a - BD = \frac{ab}{b+c} \Rightarrow MD = \frac{ab}{b+c} - \frac{a}{2} = \frac{ab-ac}{2(b+c)} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$$

$$MH = CH - \frac{a}{2} = b\cos C - \frac{a}{2} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} - \frac{a}{2} = \frac{b^2-c^2}{2a}$$

$$MH \cdot MD = \frac{a(b-c)}{2(b+c)} \cdot \frac{\left(b^2-c^2\right)}{2a} = \frac{(b-c)^2}{4} = MK^2.$$

850 (н).



а) $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$ по теореме синусов.

$$a + b = 2R(\sin A + \sin B) = 4R\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

б) $a - b = 2R(\sin A - \sin B) = 4R\sin\dfrac{|A-B|}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}.$

в) $$\frac{|a-b|}{a+b} = \frac{4R\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{|A-B|}{2}}{4R\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{|A-B|}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}.$$

г) $ac\cos B - bc\cos A = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2} - \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2} = a^2 - b^2$ (по теореме косинусов $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$).

д) $a + b + c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C) =$ (по теореме синусов) $=$
$= 2R(\sin(180^\circ - B - C) + \sin B + \sin C) =$
$= 2R(\sin(B + C) + \sin B + \sin C) =$

$$= 2R\left(2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B+C}{2} + 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}\right) =$$

$$= 4R\sin\frac{B+C}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right) =$$

$$= 4R\cos\frac{A}{2}\left(2\cos\frac{B}{2}+2\cos\frac{C}{2}\right)=8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

т.к. $\cos\frac{A}{2}=\cos\left(\frac{180°-B-C}{2}\right)=\sin\frac{B+C}{2}$.

е) $\cos^2 A=\sin^2 B+\cos^2 C-2\sin A\sin B\cos C$

$\angle C=180°-\angle A-\angle B$; $\cos C=-\cos(A+B)$

$\sin^2 B+\cos^2 C-2\sin A\sin B\cos C=$

$=\sin^2 B+\cos^2(A+B)+2\sin A\sin B(\cos A\cos B-\sin A\sin B)=$

$=\sin^2 B+\cos^2 A\cos^2 B-2\sin A\sin B\cos A\cos B+\sin^2 A\sin^2 B+$

$+2\sin A\sin B\cos A\cos B-2\sin^2 A\sin^2 B=$

$=\sin^2 B+\cos^2 A\cos^2 B-\sin^2 A\sin^2 B=$

$=\cos^2 A\cos^2 B+\sin^2 B\cos^2 A=\cos^2 A$.

Что и требовалось доказать.

ж) $S=pr=\left(\frac{c}{\sin C}=2R\Rightarrow\sin C=\frac{C}{2R}\right)$.

$S=\frac{ab\sin C}{2}=bR\sin C$; $\frac{(a+b+c)}{2}r=bR\sin A\sin C$

$a=2R\sin A$; $b=2R\sin B$

$$r=\frac{2bR\sin A\sin C}{(a+b+c)}=\frac{4R^2\sin A\sin B\sin C}{(a+b+c)}=$$

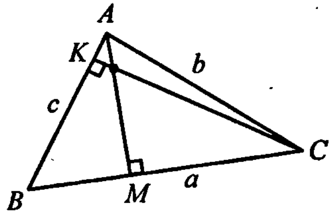
$$=\frac{4\cdot 4R^2\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(т.к. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ $a+b+c=\ldots$ пункт д)).

з) $$r=4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}=\frac{2a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin A}=$$

$$=\frac{2a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$a=2R\sin A$, т.к. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.



и)

$AH = \dfrac{AK}{\cos\angle MAB}$ из ΔAHK

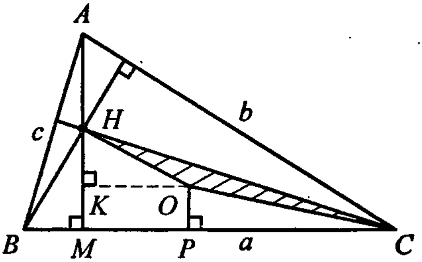
$\angle MAB = 90° - \angle B$

$AH = \dfrac{AK}{\cos(90° - \angle B)} = \dfrac{AK}{\sin B}$, $AK = b\cos A$

($\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ – теорема косинусов)

$$AH = \frac{b\cos A}{\sin B} = \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)}{2c\sin B} = \frac{a\left(b^2 + c^2 - a^2\right)}{4S}$$

т.к. $S = \dfrac{1}{2}ac\sin B$



к)

OP – серединный перпендикуляр к стороне BC

$OH^2 = OC^2 + CH^2 - 2CO \cdot CH\cos\angle OCH$ – теорема косинусов для ΔOCH .

$\angle POC = \angle A$ (т.к. $\angle BOC$ — центральный угол, если провести описанную окружность ΔABC).

$\angle BCH = 90° - \angle B$

$CH = \dfrac{c\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{4S}$ из пункта и)

$OC = R;\ \angle OCH = 90° - \angle B - \angle A$

$\cos\angle OCH = \cos(90° - \angle B - \angle A) = \sin(A + B) = \sin C$ т.к. $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

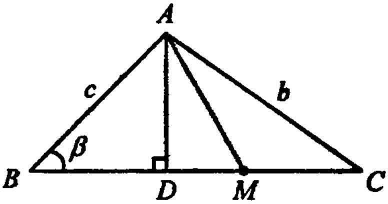
$$OH^2 = R^2 + \frac{c^2\left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2}{4S^2} - 2R\frac{c^2\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{4S}\sin C =$$

$2S = ab\sin C$

$$= R^2 + \frac{c^2\left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2}{4S^2} - \frac{Rc\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{4ab} =$$

$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C;\ R = \dfrac{abc}{4S}$

$$= R^2 + 4c^2\operatorname{ctg}^2 C - \frac{2abc^2\cos C}{4S} = R^2 + 4c^2\operatorname{ctg}^2 C - c^2\operatorname{ctg} C$$

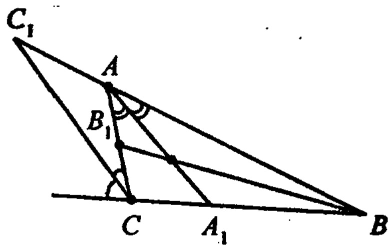


л)
Пусть $b>c$, $BD = c\cos B$
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$ (теорема косинусов)

$$c\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$$

$$DM = \frac{a}{2} - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a} = \frac{b^2 - c^2}{2a}.$$

851 (н).



Найдем чему равно произведение

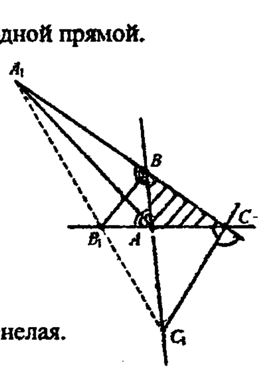
$$X = \frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1};\ \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{CB}{AB}$$ (по свойству биссектрисы)

$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC}{CB}$$ (№ 837); $$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}$$

тогда $X = \frac{AC}{CB}\cdot\frac{AB}{AC}\cdot\frac{CB}{AB} = 1$.

По теореме Менелая точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

852 (н).



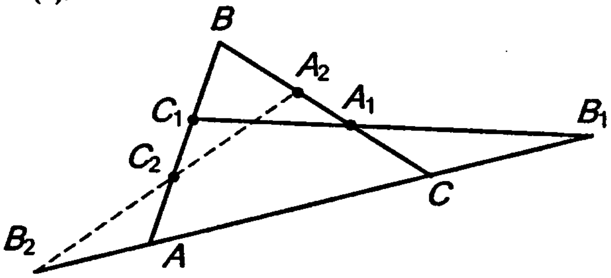
$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}$$ (по 837 номеру);

$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC}{BC};\ \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow$$

$$\frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1} = 1.$$

Значит A_1, B_1 и C_1 лежат на одной по теореме Менелая.

853 (н).



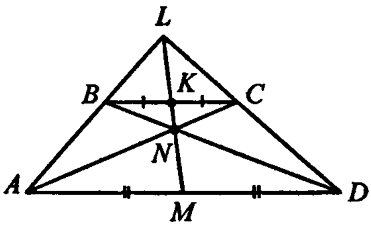
$\frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1$

C_1 и C_2 симметричны относительно середины AB.

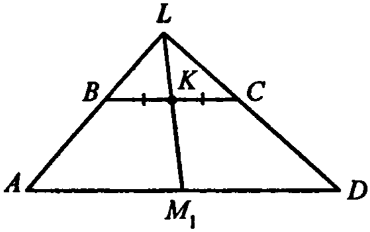
$AC_2=BC_1$ и $BC_2=AC_1$

Аналогично $BA_2 = A_1C$, $CA_2 = BA_1$ и $CB_1 = AB_2$ и $AB_1 = CB_2$ тогда $\frac{AC_2}{BC_2}\cdot\frac{BA_2}{CA_2}\cdot\frac{CB_2}{AB_2}=\frac{BC_1}{AC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1 \Rightarrow A_2$, B_2 и C_2 лежат на одной прямой.

854 (н).



Точки L, K и M лежат на одной прямой.



Т.к. если проведем медиану в ΔBLC до пересечения с AD, тогда $\Delta BLK \infty \Delta ALM_1$ и $\Delta CKL \infty \Delta DM_1L$.

$\frac{BK}{AM_1}=\frac{LK}{LM_1}=\frac{KC}{M_1D} \Rightarrow AM_1 = MD \Rightarrow (M = M_1)$.

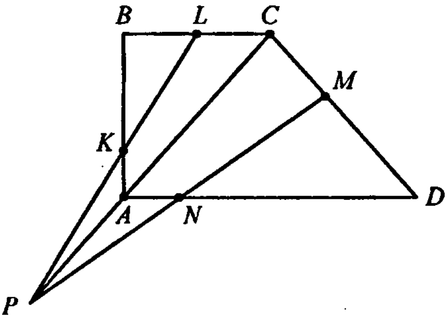
Докажем теперь, что N лежит на LM.

$\frac{AL}{BL}=\frac{AM}{BK}$ из подобия ΔALM и ΔBLK;

$\frac{CN}{AN}=\frac{KC}{AM}$ из подобия ΔKCN и MNA.

Значит $\frac{AL}{BL}\cdot\frac{BK}{CK}\cdot\frac{CN}{AN}=\frac{AM}{BK}\cdot\frac{KC}{AM}=1 \Rightarrow$ по теореме Менелая L, K и N лежат на одной прямой. Что и требовалось доказать.

855 (н).



а) $\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DN}{NA}=1$.

Пусть KL пересекает C в точке P, MN пересекает AC в точке P_1

Тогда по теореме Менелая для ΔABC и ΔACD имеем:

$\frac{AK}{BK}\cdot\frac{BL}{CL}\cdot\frac{CP}{AP}=1$.

$\frac{AP_1}{CP_1}\cdot\frac{CM}{DM}\cdot\frac{DN}{AN}=1$ перемножим и получим $\frac{CP}{AP}\cdot\frac{AP_1}{CP_1}=1$.

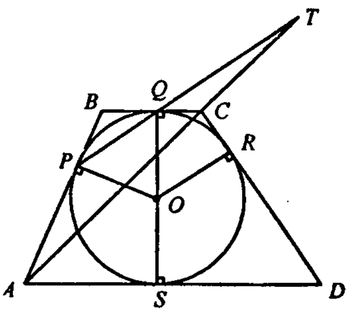
$CP(AP+PP_1)=AP(CP+PP_1)$

$(CP-AP)PP_1=0 \Rightarrow PP_1=0$, т.е. P и P_1 совпадают.

Значит LK, AC и MN пересекаются в одной точке.

б) Решение в точности аналогично.

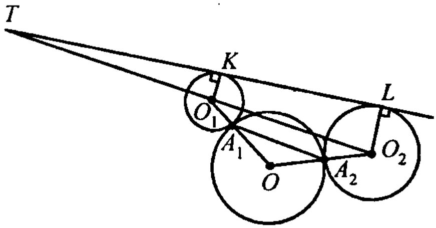
856 (н).



$BP=BQ$, $AP=AS$, $SD=RD$, $QC=CR$, тогда

$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BP}{QC}\cdot\frac{QC}{DR}\cdot\frac{DR}{AP}=1$ значит по предыдущей задаче PQ, AC и RS пересекаются в одной точке или параллельны.

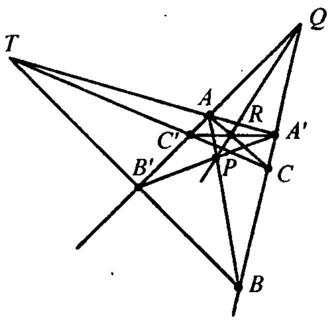
857 (н).



Обозначим $O_1A_1 = R_1$, $O_2A_2 = R_2$, $OA_1 = OA_2 = R$.
$\Delta TKO_1 \infty \Delta TLO_2$ по 1-му признаку подобия Δ
($\angle TKO_1 = \angle TLO_2 = 90°$, $\angle T$ – общий).

$\frac{TO_1}{TO_2}=\frac{KO_1}{LO_2}=\frac{R_1}{R_2}$, тогда $\frac{OA_1}{O_1A_1}\cdot\frac{O_1T}{O_2T}\cdot\frac{O_2A_2}{OA_2}=R=\frac{R}{R_1}\cdot\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{R_2}{R}=1 \Rightarrow$ по теореме Менелая точки T, A_1 и A_2 лежат на одной прямой

858 (н).



Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке T, запишем теорему Менелая.

$\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BB_1}{TB_1}\cdot\frac{TA_1}{AA_1}=1$ для ΔABT

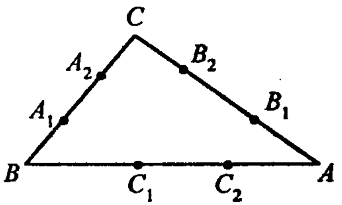
$\frac{AR}{CR}\cdot\frac{CC_1}{TC_1}\cdot\frac{TA_1}{AA_1}=1$ для ΔACT

$\frac{BQ}{CQ}\cdot\frac{CC_1}{TC_1}\cdot\frac{TB}{BB_1}=1$ теорема Менелая для ΔBCT.

$\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BQ}{CQ}\cdot\frac{CR}{AR}=\frac{TB_1\cdot AA_1}{BB_1\cdot TA_1}\cdot\frac{TC_1\cdot BB_1}{CC_1\cdot TB_1}\cdot\frac{CC_1\cdot TA_1}{TC_1\cdot AA_1}=1 \Rightarrow$

из теоремы Менелая для ΔABC следует что P, Q и R лежат на одной прямой.

859 (н).

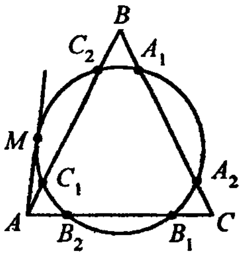


$A_2C = A_1B$ (т.к. они симметричны относительно середины).

$CB_2 = AB_1,\ AC_2 = BC_1 \Rightarrow \dfrac{AC_1}{BC_1}\cdot\dfrac{BA_1}{CA_1}\cdot\dfrac{CB_1}{AB_1} = \dfrac{BC_2}{AC_2}\cdot\dfrac{CA_2}{BA_2}\cdot\dfrac{AB_2}{CB_2}$,

т.е. если AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то и AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке по теореме Чевы.

860 (н).

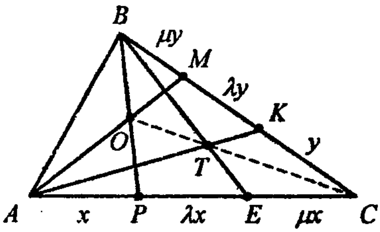


По теореме о касательной и секущей $AC_1{\cdot}AC_2 = AB_2{\cdot}AB_1$ (если из точки A провести касательную AM к окружности $AM^2 = AC_1{\cdot}CB_2 \Rightarrow$

$$\frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{AC_1}{AB_1}\cdot\frac{BA_1}{BC_1}\cdot\frac{CB_1}{CA_1} = \frac{AB_2}{AC_2}\cdot\frac{BC_2}{BA_2}\cdot\frac{CA_2}{CB_2}.$$

Значит если AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то по теореме Чевы AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

861 (н).



$$\frac{AP}{PE} = \frac{CK}{KM};\ \frac{AP}{EC} = \frac{CK}{MB}.$$

Обозначим $AP = x$, $CK = y$, $PE = \lambda x$, $EC = \mu y$ тогда $KM = \lambda y$, $BM = \mu y$ для ΔBPC запишем теорему Менелая для прямой AM

$$\frac{BO}{PO}\cdot\frac{PA}{CA}\cdot\frac{CM}{BM}=1$$

для ΔEBC запишем теорему Менелая для прямой AK

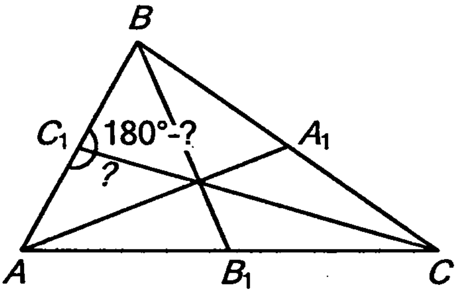
$$\frac{ET}{BT}\cdot\frac{BK}{CK}\cdot\frac{CA}{EA}=1;$$

$$\frac{BO}{PO}\cdot\frac{PC}{EC}\cdot\frac{ET}{BT}=\frac{BM\cdot\cancel{AC}}{CM\cdot PA}\cdot\frac{PC}{EC}\cdot\frac{CK\cdot EA}{\cancel{AC}\cdot BK}=$$

$$=\frac{\mu y\cdot(\lambda+\mu)x\cdot y\cdot x(\lambda+1)}{y(\lambda+1)\cdot x\cdot\mu x\cdot y(\lambda+\mu)}=1.$$

Значит для ΔBPE справедлива теорема Менелая $\Rightarrow$ точки $O_1 T$ и C лежат на одной прямой.

862 (н).



а)

Для ΔAC_1C и ΔCC_1B запишем теорему синусов $\frac{AC_1}{\sin\angle ACC_1}=\frac{AC}{\sin\alpha}$.

$$\frac{BC_1}{\sin\angle C_1CB}=\frac{BC}{\sin(180°-\alpha)}=\frac{BC}{\sin\alpha}\Rightarrow\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB}\cdot\frac{AC}{BC}.$$

Аналогично для ΔBAA_1 и ΔA_1AC находим

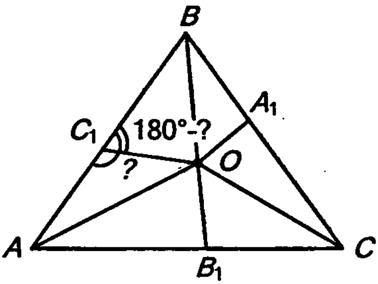
$$\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}\cdot\frac{AB}{AC}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA}\cdot\frac{BC}{AB}\Rightarrow$$

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=\frac{\sin\angle ACC_1}{\sin\angle C_1CB}\cdot\frac{\sin\angle BAA_1}{\sin\angle A_1AC}\cdot\frac{\sin\angle CBB_1}{\sin\angle B_1BA}=1\ (*)$$

Значит если AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то по теореме Чевы выполнено (*) и наоборот, если выполнено (*),

то $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=1$, AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Что и требовалось доказать.



б)

Для ΔAOC_1 и ΔBOC_1 запишем теорему синусов

$$\frac{AC_1}{\sin\angle AOC_1}=\frac{AO}{\sin\alpha};\ \frac{BC_1}{\sin\angle C_1OB}=\frac{BO}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\frac{BO}{\sin\alpha}\Rightarrow$$

$$\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{\sin\angle AOC_1}{\sin\angle C_1OB}\cdot\frac{AO}{BO}.$$

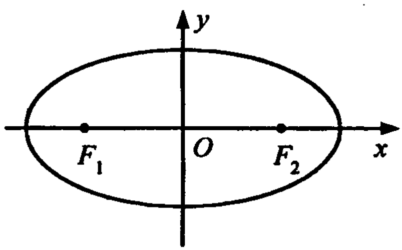
Аналогично из теоремы синусов для ΔBOA_1 и COA_1, ΔAOB_1 из COB_1 получаем

$$\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{\sin\angle BOA_1}{\sin\angle A_1OC}\cdot\frac{BO}{CO};\ \frac{CB_1}{AB_1}=\frac{\sin\angle COB_1}{\sin\angle B_1OA}\cdot\frac{CO}{AO}\Rightarrow$$

$$\frac{AC_1}{BC_1}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}=\frac{\sin\angle AOC_1}{\sin\angle C_1OB}\cdot\frac{\sin\angle BOA_1}{\sin\angle A_1OC}\cdot\frac{\sin\angle COB_1}{\sin\angle B_1OA}.$$

Значит из теоремы Чевы следует, что AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, тогда и только тогда, когда $\frac{\sin\angle AOC_1}{\sin\angle C_1OB}\cdot\ldots\cdot\frac{\sin\angle COB_1}{\sin\angle B_1OA}=1$.

863 (н).



а)

$F_1F_2=4\sqrt{2}$, $OF_1=OF_2=2\sqrt{2}=C$;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$, $C=2\sqrt{2}$; $\frac{a^2}{a^2-c^2}=9$ по условию.

$9a^2-9c^2=a^2 \qquad 8a^2=9c^2=9\cdot 8$

$a=3$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1.$$

б) $e-\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ – эксцентриситет

в) $x=\frac{a^2}{c}=\frac{9}{2\sqrt{2}}$ – правая директриса

$x=-\frac{9}{2\sqrt{2}}$ – левая директриса.

864 (н).

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ – прямая проходит через точки (1, – 1) и (3; 1).

Значит прямая имеет уравнение $y=x-2$. Решим уравнение:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(x-2)^2}{4}=1$$

$$4x^2+(x-2)^2=36$$

$$4x^2+9x^2-36x+36=36$$

$$13x^2-36x=0$$

$x_1=0$ и $x_2=\frac{36}{13}\Rightarrow y_1=0-2=-2$, $y_2=\frac{36}{13}-2=\frac{10}{13}$.

Значит прямая и эллипс пересекаются в точках (0; – 2) и $\left(\frac{36}{13};\frac{10}{13}\right)$.

865 (н).

а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ и $x^2+y^2=7$ – данная окружность.

$$y^2=7-x^2$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{7-x^2}{4}=1$$

$$x^2+28-4x^2=16$$

$$3x^2=12, x_1=2, x_2=-2$$

$$y^2=7-4=3,\ y_1=\sqrt{3},\ y_2=-\sqrt{3}.$$

Значит Эллипс и окружность пересекаются в 4-х точках $\left(2;\sqrt{3}\right)$, $\left(2;-\sqrt{3}\right)$, $\left(-2;\sqrt{3}\right)$, $\left(-2;-\sqrt{3}\right)$

б) Окружность радиуса 2 с центром в точке (2; 0)

$(x-2)^2+y^2=4\Rightarrow y^2=4-(x-2)^2=-x^2+4x$

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

Решим уравнение $\frac{x^2}{16}+\frac{-x^2+4x}{4}=1$

$$x^2-4x^2+16x=16$$

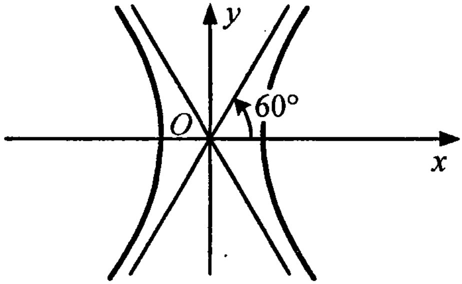
$3x^2 - 16x + 16 = 0$

$x_1 = 4,\ x_2 = \frac{4}{3} \Rightarrow y_1^2 = 4 - (4-2)^2 = 0$

$y_2^2 = 4 - \left(\frac{4}{3} - 2\right)^2 = 4 - \frac{4}{9} = \frac{32}{9}$.

Значит окружность и эллипс касаются в точке (4; 0) и пересекаются в точках $\left(\frac{4}{3}; \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ и $\left(\frac{4}{3}; -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$.

866 (н).



а)

$F_1F_2 = 4 = 2c;\ c = 2$

$y = \frac{b}{a}x$ – асимптота гиперболы

т.к. $\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, то $\frac{b}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 4 - a^2 = 3a^2$

$a^2 = 1,\ b^2 = 3 \Rightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$ – уравнение гиперболы.

б) $\epsilon = \frac{c}{a} = 2$ – эксцентриситет

в) $x = \frac{a^2}{c} = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{1}{2}$ – уравнения директрис гиперболы

867 (н).

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; $y = \frac{2\sqrt{2}}{x}$.

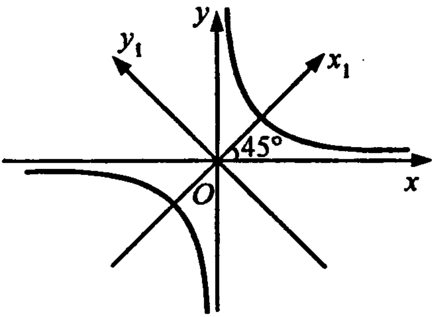
$\frac{x^2}{9} + \frac{8}{4x^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{2}{x^2} = 1$

$x^4 - 9x^2 + 18 = 0$

$x_1^2 = 3,\ x_2^2 = 6 \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{3}, x_2 = \pm\sqrt{6}$.

Значит гипербола и эллипс пересекаются в 4-х точках $\left(-\sqrt{6}; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{3}; -2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $\left(\sqrt{6}; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ и $\left(\sqrt{3}; 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

868 (н).



$$y = \frac{k}{x}$$

Сделаем замену координат $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$,

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y$$

$$x = \sqrt{2}(x_1 + y_1),\ y = \sqrt{2}(x_1 - y_1).$$

Тогда уравнение гиперболы $y = \frac{k}{x}$ в координатах x_1Oy_1 записывается в виде:

$$\left(-y_1^2 + x_1^2\right) = k$$

$$\frac{x_1^2}{\frac{k}{2}} - \frac{y_1^2}{\frac{k}{2}} = 1$$

$$e = \frac{c}{a};\ a^2 = \frac{k}{2},\ c^2 - a^2 = \frac{k}{2} \Rightarrow c^2 = k$$

$$e = \frac{\sqrt{k}}{\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

Уравнения директрис

$$x_1 = \frac{a^2}{c} = \frac{k}{2\sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k}}{2};\ x_2 = -\frac{\sqrt{k}}{2}$$

$x_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{k}}{2} \Rightarrow$

$y = \sqrt{\frac{k}{2}} - x$ и $y = -\sqrt{\frac{k}{2}} - x$ – директрисы.

869 (н).
$y = ax^2 + bx + c$

Сделаем замену координат $x_1 = x + \frac{b}{2a}$; $y_1 = x + \frac{b^2}{4a} - c$.

O_1 имеет координаты $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a} + c\right)$

Тогда уравнение параболы в осях $O_1x_1y_1$ примет вид:

$$y_1 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x_1 - \frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(x_1 - \frac{b}{2a}\right) + c =$$

$$= ax_1^2 - bx_1 + bx_1 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$y_1 = ax_1^2 \Rightarrow p = \frac{a}{2}$, p – расстояние от фокуса до директрисы.

$y_1 = -\frac{p}{2}$ – уравнение директрисы.

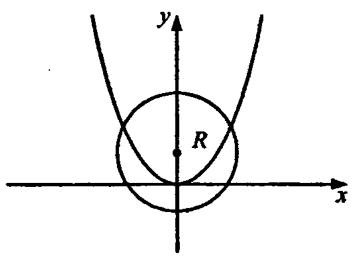
$y_1 = -\frac{a}{4}$; $-\frac{a}{4} - = y + \frac{b^2}{4a} - c$;

$y = -\frac{b^2}{4a} - \frac{a}{4} + c$ – уравнение директрисы.

Фокус в системе координат $O_1x_1y_1$ имеет координаты $\left(0; \frac{p}{2}\right)$, значит в *СК Oxy*

$\left(-\frac{b}{2a}; \frac{a}{4} - \frac{b^2}{4a} + c\right)$ т.к. $y = c - \frac{b^2}{4a} + y_1$; $x = x_1 - \frac{b}{2a}$.

870 (н).
$y = x^2$



Уравнение окружности имеет вид $x^2 + (y - R)^2 = R^2$.

Решим уравнение

$y + (y - R)^2 = R^2$

$y^2 - 2Ry + y = 0$

$y^2 + y(1 - 2R) = 0$

$y(y + 1 - 2R) = 0 \Rightarrow y = 0$ или $y = 2R - 1$.

Если $R = \frac{1}{2}$, то парабола и окружность касаются в точке (0; 0);

если $R > \frac{1}{2}$ – касаются в точке (0; 0) и пересекаются в точках $\left(\sqrt{2R-1}, 2R-1\right)$, $\left(-\sqrt{2R-1}, 2R-1\right)$.

Учебно-методическое издание

Кадеев Алексей Александрович

Домашняя работа по геометрии за 11 класс

Издательство **«*ЭКЗАМЕН*»**

Гигиенический сертификат
№ 77.99.60.953.Д.013269.11.07 от 13.11.2007 г.

Выпускающий редактор *Л.Д. Лаппо*
Технический редактор *Н.Я. Богданова*
Дизайн обложки *Л.В. Демьянова*
Компьютерная верстка *М.В. Демина*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7

Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов