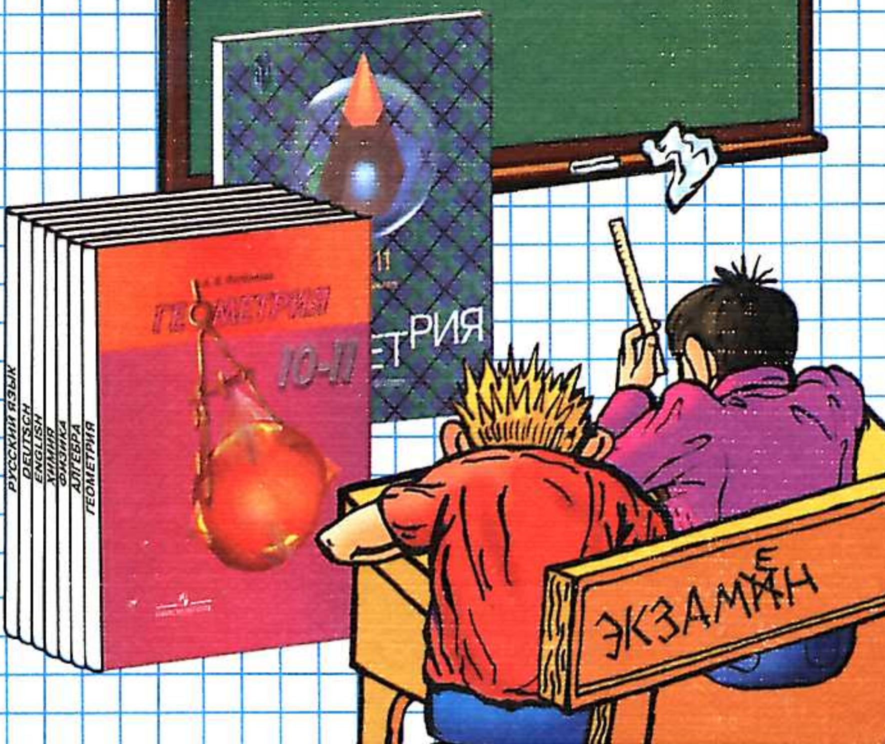
Серия
РЕШЕБНИК

ТОЛЬКО ДЛЯ РОДИТЕЛЕЙ

Домашняя работа по геометрии

11

«Геометрия 10 – 11 классы»
А.В. Погорелов



А.В. Морозов

Домашняя работа по геометрии за 11 класс

к учебнику «Геометрия: учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений / А.В. Погорелов. — 7-е изд. — М.: Просвещение, 2007»

Учебно-методическое пособие

Издание седьмое, переработанное и исправленное

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА
2009

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21 я72
М80

Морозов, А.В.

М80 Домашняя работа по геометрии за 11 класс к учебнику А.В. Погорелова «Геометрия: учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений»: учебно-методическое пособие / А.В. Морозов. — 7-е изд., перераб. и испр. — М.: Издательство «Экзамен», 2009. — 127, [1] с. (Серия «Решебник»)

ISBN 978-5-377-02013-4

В пособии решены и в большинстве случаев подробно разобраны задачи из учебника «Геометрия: учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений / А.В. Погорелов. — 7-е изд. — М.: Просвещение, 2007».

Пособие адресовано родителям, которые смогут проконтролировать правильность решения, а в случае необходимости помочь детям в выполнении домашней работы по геометрии.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21 я72

Формат 84x108/32. Гарнитура «Таймс». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 2,56.
Усл. печ. л. 6,72. Тираж 15 000 экз. Заказ №6503

ISBN 978-5-377-02013-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

§5 (§20)[1]. Многогранники.

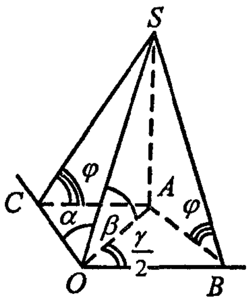
1. Из точек A и B в гранях двугранного угла опущены перпендикуляры AA_1 и BB_2 на ребро угла. Найдите длину отрезка AB, если $AA_1 = a$, $BB_1 = b_1$ $A_1B_1 = c$ и двугранный угол равен α[2].

Задача решена в учебнике п. 39 (171), стр. 66.

2. У трехгранного угла (abc) двугранный угол при ребре c прямой, двугранный угол при ребре b равен φ, а плоский угол (bc) равен γ (φ, $\gamma < \frac{\pi}{2}$). Найдите два других плоских угла $\alpha = \angle(ab)$, $\beta = \angle(ac)$

Задача решена в учебнике п. 40 (172), стр. 67.

3. У трехгранного угла один плоский угол равен γ, а прилегающие к нему двугранные углы равны φ ($\varphi < \frac{\pi}{2}$). Найдите два других плоских угла α и угол β, который образует плоскость угла γ с противолежащим ребром.



Из произвольной точки S ребра, противолежащие углу γ, проведем перпендикуляры SA на плоскость угла γ и перпендикуляры SB и SC на его стороны. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $AB \perp OB$ и $AC \perp OC$.

Рассмотрим прямоугольные ΔSCA и ΔSBA. Они равны по катету и противолежащему углу ($\angle SCA = \angle SBA = \varphi$). Тогда $AB = CA$. А значит, $\Delta AOB = \Delta AOC$ по катету и гипотенузе. Так что $\angle AOC = \angle AOB$. А так как $\angle COB = \angle AOC + \angle AOB = \gamma$, то $\angle AOC = \angle AOB = \frac{\gamma}{2}$.

Далее, в ΔASC $SC = \frac{AS}{\sin\varphi}$ и $AC = \frac{AS}{tg\varphi}$.

В ΔACO $OA = \frac{AC}{\sin\angle ADC} = \frac{AC}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{AC}{tg\varphi \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}$ и $OC = \frac{AC}{tg\frac{\gamma}{2}} = \frac{AS}{tg\varphi \cdot tg\frac{\gamma}{2}}$.

---

[1] Цифры в скобках обозначают номер параграфа (пункта) из учебника 2001 года издания.

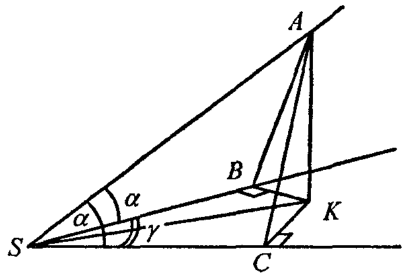
[2] Условия заданий приводятся в учебных целях и в необходимом обьеме как иллюстративный материал. Имя автора и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги (Ст. 19 п. 2 закона РФ «Об авторском праве и смежных правах» от 9 июня 1993 г.)

Тогда из ΔSDC $\quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{SC}{OC} = \dfrac{tg\varphi \cdot tg\frac{\gamma}{2} \cdot AS}{\sin\varphi \cdot AS} = \dfrac{tg\frac{\gamma}{2}}{\cos\varphi}$.

А из ΔSAO: $\quad \operatorname{tg}\beta = \dfrac{AS}{OA} = \dfrac{AS \cdot \operatorname{tg}\varphi \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{AS} = \operatorname{tg}\varphi \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$.

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\cos\varphi}\right)$, $\beta = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\varphi \cdot \sin\frac{\gamma}{2}\right)$.

4. У трехгранного угла два плоских угла острые и равны α, а третий угол равен γ. Найдите двугранные углы φ, противолежащие плоским углам α, и угол β между плоскостью γ и противолежащим ребром.



Из произвольной точки A противолежащего углу γ угла проведем перпендикуляры AK на плоскость этого угла и AB и SB на другие ребра.

Тогда по теореме о трех перпендикулярах $BK \perp SB$ и $KC \perp SC$.

Тогда $\Delta AKC = \Delta AKB$ (по общему катету AK и противолежащему углу $\angle AKC = \angle ABK = \varphi$). Тогда $BK = KC$ и $\angle BKS = \angle CKS$ (по гипотенузе и катету). Значит $\angle KSB = \angle KSC = \dfrac{\gamma}{2}$. Далее, имеем $SC = SB = AS \cdot \cos\alpha$, и $AB = AC = AS \cdot \sin\alpha$.

Из ΔSCK получаем:

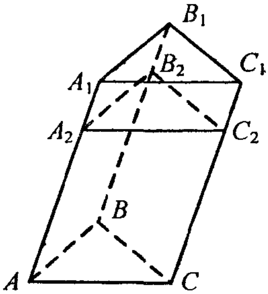
$$KC = SC \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = AS\cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \text{ и } SK = \frac{SC}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{AS\cos\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Далее, из ΔACK $\quad \cos\varphi = \cos\angle ACK = \dfrac{KC}{AC} = \dfrac{AS\cos\alpha tg\frac{\gamma}{2}}{AS\sin\alpha} = \dfrac{tg\frac{\gamma}{2}}{tg\alpha}$.

И из ΔASK $\quad \cos\beta = \cos\angle ASK = \dfrac{SK}{AS} = \dfrac{AS\cos\alpha}{AS\cos\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$.

Ответ: $\alpha = \arccos\left(\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$, $\beta = \arccos\left(\dfrac{\cos\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}}\right)$.

5. Докажите, что сечение призмы, параллельное основаниям, равно основаниям.



Пусть $A_2B_2C_2$ – данное сечение призмы.

Тогда AA_2C_2C, AA_2B_2B, BB_2C_2C – параллелограммы.

Значит,

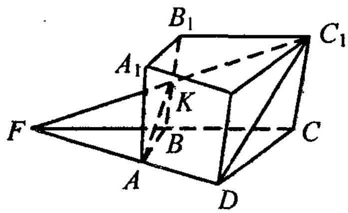
$AB = A_2B_2$, $AC = A_2C_2$, $BC = B_2C_2$ и т.д., то есть $ABC... = A_2B_2C_2...$. Что и требовалось доказать.

6. Сколько диагоналей имеет n-угольная призма?

Так как диагональ призмы – это отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, то из одной вершины можно провести $n - 3$ различные диагонали. Но вершин в основании n, так что общее количество диагоналей будет $n \cdot (n - 3)$.

Ответ: $n \cdot (n - 3)$.

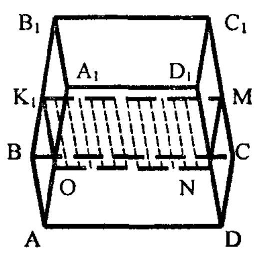
7. Постройте сечение четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через сторону основания и одну из вершин другого основания.



Пусть, например, плоскость проходит через сторону основания AD и вершину C_1, тогда отрезок C_1D принадлежит сечению. Далее, возможны два случая: либо AD пересекает BC, либо нет. Если AD пересекает BC, то точку их пересечения обозначим F. $F \in BC$, а значит $F \in (BCC_1)$. Проведем отрезок FC_1. Он пересечет BB_1 в точке K. Тогда четырехугольник AKC_1D будет искомым сечением.

Если AD не пересекает BC, то $AD \parallel BC$. Но $BC \parallel B_1C_1$, так что $AD \parallel B_1C_1$, а через две параллельные прямые проходит единственная плоскость, содержащая их. Эта плоскость является искомым сечением т.к. точки A, D, C_1 принадлежат этой плоскости.

8. Постройте сечение четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через три точки на боковых ребрах призмы.



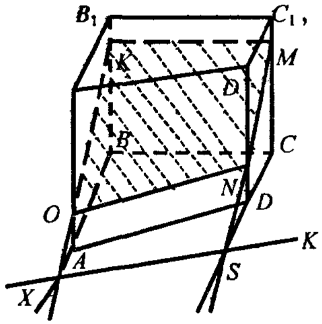
Пусть K, M и N – данные точки.

Возможны три случая:

1) Точки K, M, N расположены так, что $MN \parallel DC$ и $KM \parallel MN$. Тогда плоскость, проходящая через точки K, M и N параллельна

плоскости грани $ABCD$, т.к. две пересекающие прямые KM и MN параллельны грани $ABCD$. Проведем прямую $ON \parallel AD$. Тогда она будет принадлежать плоскости сечения. Так как иначе она пересекала бы и грань $ABCD$, то есть и AD, что неверно.

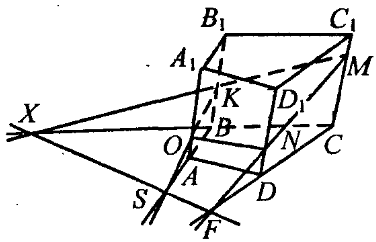
Тогда четырехугольник $KMNO$ – искомое сечение.



2) Точки K, M, N располагаются так, что $KM \parallel BC$, но MN не параллельно DC. Тогда через точки M и N проведем прямую a, которая пересекает прямую DC в некоторой точке S.

Тогда S принадлежит сечению. Через точку S проведем прямую $b \parallel KM$. Тогда b принадлежит сечению и $b \parallel BC$, т.к. $b \parallel KM$ и $KM \parallel BC$. Тогда AB пересекает прямую b в некоторой точке X. Тогда X принадлежит сечению. А также можно соединить точи K и X отрезком, который пересечет A_1A в некоторой точке O. Тогда точка O тоже принадлежит сечению. А значит, четырехугольник $OKMN$ — это искомое сечение.

Общий случай:

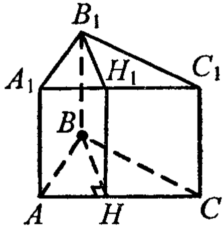


3) Когда точки K, M, N располагаются так, что MN не параллельно DC и KM не параллельно MN. Тогда прямая MN пересечет прямую DC в некоторой точке F, прямая MK пересечет прямую BC в некоторой точке X. Точки X и F принадлежат плоскости $ABCD$, а также искомому сечению, значит, плоскость $ABCD$ и сечение пересекаются по прямой XF. Тогда прямая AB, или прямая AD, или обе эти прямых пересекают прямую XF. Допустим AB пересекает XF в точке S. Тогда точка S принадлежит и плоскости AA_1B_1B, а также сечению. Проведем прямую SK. Она пересечет ребро AA_1 в точке O. Так что $MNOK$ – искомое сечение.

9. У призмы одно боковое ребро перпендикулярно плоскости основания. Докажите, что остальные боковые ребра тоже перпендикулярны плоскости основания.

Боковые ребра призмы параллельны между собой, так что поскольку одно ребро перпендикулярно основанию, то значит, и остальные боковые ребра тоже перпендикулярны основанию. Что и требовалось доказать.

10. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10 см, 17 см и 21 см, а высота призмы — 18 см. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро, и меньшую высоту основания.



Данным сечением является прямоугольник BHH_1B_1 со сторонами BB_1=18 см и BH; где BH — меньшая высота ΔABC.

Далее, площадь основания с одной стороны равна: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$= \sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)} = 84$ (см^2).

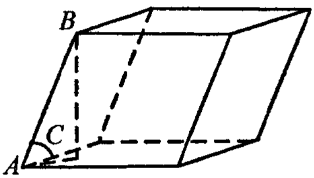
С другой стороны $S = \frac{1}{2} AC \cdot BH$, так что

$BH = \frac{2S}{AC} = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8$ (см). Тогда искомая площадь сечения равна

$S_1 = BB_1 \cdot BH = 18 \cdot 8 = 144$ (см^2).

Ответ: 144 см^2.

11. Боковое ребро наклонной при · мы равно 15 см и наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найдите высоту призмы.

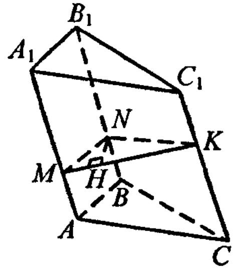


BO — перпендикуляр к основанию, так что ΔABO — прямоугольный.

Значит, $BC = AB \cdot \sin\angle BAC = 15 \cdot \sin 30° = 7{,}5$ (см).

Ответ: 7,5 см.

12. В наклонной треугольной призме расстояния между боковыми ребрами равны 37 см, 13 см и 40 см. Найдите расстояние между большей боковой гранью и противолежащим боковым ребром.



Пусть сечение MNK перпендикулярно боковым ребрам призмы. Тогда в ΔMNK:

$MN = 13$ см, $NK = 37$ см и $MK = 40$ см.

Искомое расстояние равно высоте, проведенной в ΔMNK к большей стороне, то есть NH, где $NH \perp MK$. Площадь ΔMNK с одной стороны равна:

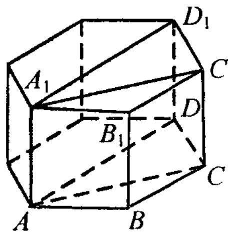
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$= \sqrt{45(45-40)(45-37)(45-13)} = \sqrt{45 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 32} = 240$ (см^2).

С другой стороны $S = \frac{1}{2} MK \cdot NH$, так что $NH = \frac{2S}{MK} = \frac{2 \cdot 240}{40} = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

13. Основанием призмы является правильный шестиугольник со стороной a, а боковые грани — квадраты. Найдите диагонали призмы и площади ее диагональных сечений.



Диагональные сечения призмы — это прямоугольники AA_1D_1D и AA_1C_1C. Далее, $AA_1=a$, $AD=2a$ (диаметр описанной окружности) и $AC=a\sqrt{3}$ (по теореме косинусов из ΔABC).

Так что площади сечений равны: $S_1=AA_1\cdot AC=\ a\cdot a\sqrt{3}=a^2\sqrt{3}$ и $S_2=AA_1\cdot AD=\ a\cdot 2a=2a^2$.

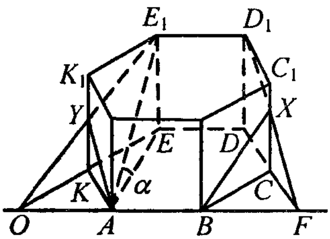
Диагонали призмы вычисляются по теореме Пифагора:

$$AD_1=\sqrt{AA_1^{\ 2}+AD^2}=\sqrt{a^2+4a^2}=\sqrt{5a^2}=a\sqrt{5}=d_1,$$

$$AC=\sqrt{AA_1^{\ 2}+AC^2}=\sqrt{a^2+3a^2}=\sqrt{4a^2}=2a=d_2.$$

Ответ: $S_1=a^2\sqrt{3}$; $S_2=2a^2$; $d_1=a\sqrt{5}$; $d_2=2a$.

14. В правильной шестиугольной призме, у которой боковые грани — квадраты, проведите плоскость через сторону нижнего основания и противолежащую ей сторону верхнего основания. Сторона основания равна a. Найдите площадь построенного сечения.



Данное сечение проходит через основание AB и E_1D_1. Обозначим точку пересечения прямых AB и DC точка F. Тогда F принадлежит плоскости сечения, а также плоскости CC_1D_1C. Так что проведем прямую D_1F, которая пересечет ребро CC_1 в некоторой точке X.

Далее, продолжим прямые EK и AB до их пересечения в точке O. Эта точка принадлежит плоскости сечения, а также грани KK_1E_1E. Тогда проведем прямую OE_1, которая пересечет ребро KK_1 в некоторой точке Y.

Шестиугольник $ABXD_1E_1Y$ — искомое сечение. Найдем его площадь по формуле $S'=\dfrac{S}{\cos\alpha}$, где S — площадь основания призмы, а α — угол, который образует данное сечение с плоскостью основания. Так как $EA\perp AB$, то и $E_1A\perp AB$ (по теореме о трех перпендикулярах). Так что $\angle EAE_1=\alpha$. Далее, $EE_1=a$, и $AE=a\sqrt{3}$ (по теореме косинусов из ΔAEK). Далее, по теореме Пифагора

$AE_1 = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = 2a$, так что $\cos\alpha = \frac{AE}{AE_1} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$S = 2S_{AKE} + S_{AEDB} = AK \cdot AE \cdot \sin\angle AKE + AE \cdot DE =$
$= a^2 \sin 120° + a \cdot a\sqrt{3} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Так что $S' = \frac{S}{\cos\alpha} = \frac{3a^2\sqrt{3} \cdot 2}{2\sqrt{3}} = 3a^2$.

Ответ: $S' = 3a^2$.

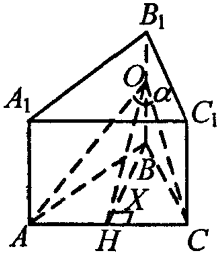
15. Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы проведена плоскость, пересекающая боковые грани по отрезкам, угол между которыми α. Найдите угол наклона этой плоскости к основанию призмы.

Пусть AOC — данная плоскость. Проведем $BH \perp AC$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OH \perp AC$.

Значит, $\angle OHB$ — искомый.

Далее, в равностороннем ΔABC высота

$BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Далее, $\angle AOH = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{\alpha}{2}$.

Так что в ΔAOH: $OH = \frac{AH}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

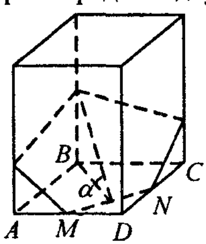
Далее, в ΔOBH: $\cos\angle OHB = \frac{BH}{OH} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{2a} = \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{a}{2}$.

Так что $\angle OHB = \arccos\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

Ответ: $\arccos\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

16. В правильной четырехугольной призме через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и наклоненная к плоскости основания под углом α. Сторона основания равна a.

Найдите площадь полученного сечения.



$ABCNM$ — это ортогональная проекция сечения.

Тогда если S — площадь $ABCNM$, то площадь сечения $S' = \frac{S}{\cos\alpha}$.

Далее, $S = S_{ABCD} - S_{MND} = AD^2 - \frac{1}{2} MD \cdot DN =$

$= a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{7}{8} a^2$. Так что $S' = \frac{S}{\cos\alpha} = \frac{7a^2}{8\cos\alpha}$.

Ответ: $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$.

17. В правильной четырехугольной призме площадь основания 144 см^2, а высота 14 см.

Найдите диагональ призмы.

Так как призма правильная, то в основании ее лежит квадрат и его площадь равна:

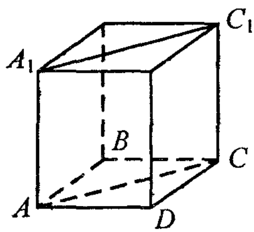
$S = a^2$. Тогда $a = \sqrt{S} = \sqrt{144} = 12$ (см).

Далее, заметим, что правильная четырехугольная призма является прямоугольным параллелепипедом, так что квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его измерений, так что:

$d = \sqrt{a^2 + a^2 + h^2} = \sqrt{12^2 + 12^2 + 14^2} = 22$ (см).

Ответ: 22 см.

18. В правильной четырехугольной призме площадь боковой грани равна Q Найдите площадь диагонального сечения.

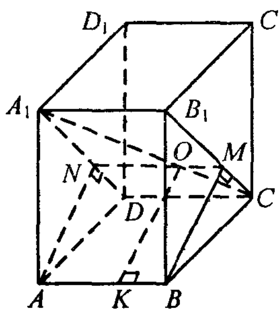


Так как боковая грань — прямоугольник, то ее площадь $Q = AA_1 \cdot AD$. А так как основание призмы — квадрат, то диагональ $AC = AD\sqrt{2}$. Тогда площадь диагонального сечения:

$S = AC \cdot AA_1 = \sqrt{2} \cdot AD \cdot AA_1 = Q \cdot \sqrt{2}$.

Ответ: $Q\sqrt{2}$.

19. Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 15 см, высота равна 20 см.



Найдите кратчайшее расстояние от стороны основания до не пересекающей ее диагонали призмы.

Проведем плоскость A_1B_1CD, а через ребро AB проведем плоскость $ABMN$, перпендикулярную плоскости A_1B_1CD.

Так как AB перпендикулярна боковым граням, то $ABMN$ — прямоугольник.

Пусть O — точка пересечения AC и MN. Проведем $OK \perp AB$. Тогда $OK = BM$.

В прямоугольном ΔBB_1C:

$B_1C = \sqrt{BB_1^2 + BC^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ (см) (по теореме Пифагора). Тогда площадь ΔBB_1C: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{30 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 5} = 150$ (см^2).

С другой стороны, $S = \frac{1}{2} B_1C \cdot BM$, так что $BM = \frac{2S}{B_1C} = \frac{2 \cdot 150}{25} = 12$ (см).

Ну и $OK = BM = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

20. В прямой треугольной призме все ребра равны. Боковая поверхность равна 12 м^2.

Найдите высоту.

Так как все ребра равны, то боковые грани являются квадратами. Далее, площадь одной грани равна трети площади боковой поверхности: $12 : 3 = 4$ (м^2). Значит, сторона квадрата равна $\sqrt{4} = 2$ (м). Тогда ребро призмы равно высоте и равно 2 м.

Ответ: 2 м.

21. Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы 32 м^2, а полная поверхность — 40 м^2.

Найдите высоту.

Так как площадь поверхности $S = S_{бок} + 2S_{осн}$, то площадь основания равна $S_{осн} = (40 - 32) : 2 = 4$ (м^2).

В основании находится квадрат, так как призма правильная, так что сторона квадрата равна $\sqrt{4} = 2$ м.

Боковая поверхность правильной призмы равна $S_{бок} = p \cdot h = 4a \cdot h$, так что $h = S : (4a) = 32 : (4 \cdot 2) = 4$ (м).

Ответ: 4 м.

22. В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра.

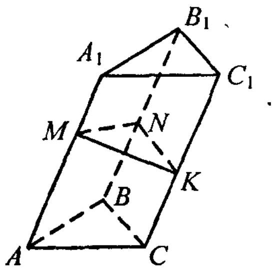
Найдите боковую поверхность призмы, если периметр сечения равен p, а боковые ребра равны l.

Задача решена в учебнике п. 44 (176), стр. 72.

23. Расстояния между параллельными прямыми, содержащими боковые ребра наклонной треугольной призмы, равны 2 см, 3 см и 4 см, а боковые ребра — 5 см. Найдите боковую поверхность призмы.

Проведем сечение MNK, перпендикулярное боковым ребрам.

Тогда стороны ΔMNK равны расстояниям между параллельными прямыми, содержащими ребра.



Далее, площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра сечения, перпендикулярного боковым ребрам, на длину бокового ребра. Так что

$S_{бок} = p \cdot l = (2+3+4) \cdot 5 = 45$ (см^2).

Ответ: 45 см^2.

24. По стороне основания a и боковому ребру b найдите полную поверхность правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

Полная поверхность призмы вычисляется по формуле:

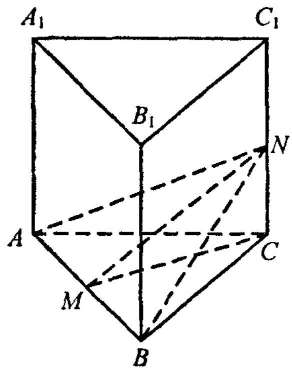
$$S = S_{бок} + 2S_{осн}.$$

1) Основание призмы — равносторонний треугольник, так что его площадь $S_{осн} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Площадь боковой поверхности $S_{бок} = p \cdot l = 3ab$. Так что $S = 3ab + \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

2) Основание призмы — квадрат с площадью $S_{осн} = a^2$. Площадь боковой поверхности $S_{бок} = p \cdot l = 4ab$. Так что $S = 2a^2 + 4ab$.

3) Основание призмы — правильный шестиугольник. Его площадь $S_{осн} = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$. А площадь боковой поверхности $S_{бок} = p \cdot l = 6ab$. Так что $S = 6ab + a^2 3\sqrt{3}$.

25. Плоскость, проходящая через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего ребра, образует с основанием угол 45° Сторона основания l. Найдите боковую поверхность призмы.



По условию $\angle NMC = 45°$, значит

$$MC = NC = \frac{CC_1}{2}.$$

По теореме Пифагора

$$MC = \sqrt{BC^2 - BM^2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = l\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$CC_1 = 2MC = l\sqrt{3}.$$

Площадь боковой поверхности призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $Ph = 3l \cdot l\sqrt{3} = 3\sqrt{3}l^2$.

Ответ: $Ph = 3\sqrt{3}l^2$.

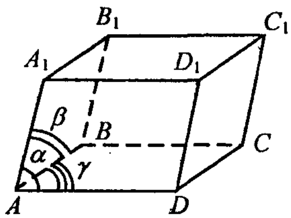
26. У параллелепипеда три грани имеют поверхности 1 м^2, 2 м^2 и 3 м^2. Чему равна полная поверхность параллелепипеда?

У параллелепипеда противоположные грани равны, а значит, имеют равные площади. Так что данный параллелепипед имеет две грани с площадью 1 м^2, две грани с площадью по 2 м^2 и две грани с площадью по 3 м^2. Так что площадь полной поверхности

$S = 2 \cdot (1 + 2 + 3) = 12$ (м^2).

Ответ: 12 м^2.

27. Известны углы, образуемые ребрами параллелепипеда, сходящимися в одной вершине. Как найти углы между ребрами, сходящимися в любой другой вершине?

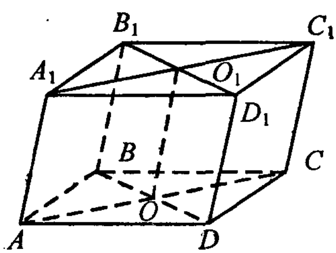


При вершине A $\angle A_1AD = \alpha$, $\angle A_1AB = \beta$ и $\angle BAD = \gamma$. Так как все грани параллелепипеда — параллелограммы, $\angle C = \angle A_1 = \gamma$ (как противоположные в параллелограмме), $\angle B = \angle D = 180° - \gamma$ (в параллелограмме $ABCD$).

Далее, $\angle B_1A_1D_1 = \angle B_1C_1D_1 = \angle BAD = \angle BCD = \gamma$ (так как противолежащие грани равны).

Далее, $\angle ABC = \angle ADC = \angle A_1B_1C_1 = \angle A_1D_1C_1 = 180° - \gamma$; $\angle A_1AB = \angle A_1B_1B = \angle D_1C_1C = \beta$; $\angle AA_1B_1 = \angle B_1BA = \angle C_1CD = \angle DD_1C = 180° - \beta$; $\angle A_1AD = \angle A_1D_1D = \angle B_1BC = \alpha$; $\angle AA_1D_1 = \angle D_1DA = \angle BB_1C = \angle C_1CB = 180° - \alpha$.

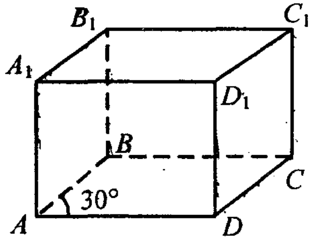
28. Докажите, что отрезок, соединяющий центры оснований параллелепипеда, параллелен боковым ребрам.



Центры оснований параллелепипеда являются точками пересечения диагоналей параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Далее, $ABCD = A_1B_1C_1D_1$ (как противоположные грани). Так что $AC = A_1C_1$, и $O_1C_1 = OC = \frac{1}{2}AC$.

Так как $O_1C_1 \parallel OC$ и $O_1C_1 = OC$, то $O_1C_1\ OC$ — параллелограмм, так что $OO_1 \parallel CC_1$. Что и требовалось доказать.

29. В прямом параллелепипеде стороны основания 6 м и 8 м образуют угол 30°, боковое ребро равно 5 м. Найдите полную поверхность этого параллелепипеда.



Полная поверхность прямого параллелепипеда равна $S = 2S_1 + S_2$.

Площадь параллелограмма $ABCD$, являющегося основанием, равна

$S_{осн} = AB \cdot AD \cdot \sin 30° = 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 24$ (см^2).

А площадь боковой поверхности равна

$S_{бок} = p \cdot l = 2(AB + BC)AA_1 = 2 \cdot (6+8) \cdot 5 = 140$ (см^2).

Так что $S = 2 \cdot 24 + 140 = 188$ (см^2).

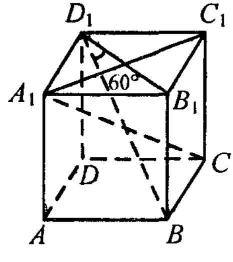
Ответ: 188 см^2

30. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 8 см, угол между ними 60°. Боковая поверхность равна 220 см^2. Найдите полную поверхность.

Полная поверхность параллелепипеда равна $S = S_{бок} + 2S_{осн}$ Так как в основании лежит параллелограмм, то $S_1 = ab \cdot \sin\alpha = 3 \cdot 8 \cdot \sin 60° = 12\sqrt{3}$ (см^2). А $S_{бок} = 220$ см^2 (по условию).

Так что $S = 2 \cdot 12\sqrt{3} + 220 = 220 + 24\sqrt{3}$ (см^2).

31. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 5 см, а одна из диагоналей основания 4 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда, зная, что меньшая диагональ образует с плоскостью основания угол 60°.



По условию $A_1D_1 = 3$см, $D_1C_1 = 5$ см, $D_1B_1 = 4$ см. Так как основание является параллелограммом, а у параллелограмма сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов его сторон, то

$2A_1B_1^2 + 2 \cdot A_1D_1^2 = A_1C_1^2 + B_1D_1^2$. Так что:

$A_1C_1 = \sqrt{2 \cdot A_1B_1^2 + 2 \cdot A_1D_1^2 - D_1B_1^2} =$

$= \sqrt{2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 5^2 - 4^2} = \sqrt{52}$ (см). Так что

$A_1C_1 > D_1B_1$, а значит, диагональ BD — меньшая, а A_1C — большая.

Далее, в ΔBB_1D_1: $BB_1 = B_1D_1 \cdot \mathrm{tg}60° = 4\sqrt{3}$ (см). $CC_1 = BB_1 = 4\sqrt{3}$ см.

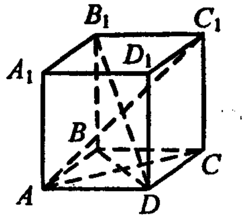
Далее, в ΔCC_1A_1 по теореме Пифагора:

$A_1C = \sqrt{A_1C_1^2 + CC_1^2} = \sqrt{(\sqrt{52})^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{100} = 10$ (см).

Ответ: 10 см.

32. Найдите диагонали прямого параллелепипеда, у которого каждое ребро равно a, а угол основания равен 60°.

Так как каждое ребро равно a, то ΔABD — равнобедренный ($AB=AD=a$) и так как $\angle BAD=60°$, то ΔABD является равносторонним и $BD = AB = a$. Далее, из прямоугольного ΔBB_1D по теореме Пифагора



$$B_1D = \sqrt{BD^2 + BB_1^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

В ΔADC по теореме косинусов

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2 - 2AD\cdot DC\cdot\cos 120°} =$$

$$= \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = a\sqrt{3}.$$

А из прямоугольного ΔACC_1 по теореме Пифагора:

$$AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a.$$

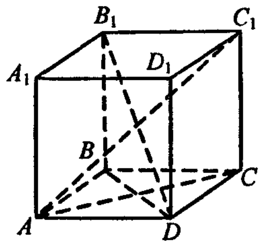
Ответ: $a\sqrt{2}$ и $2a$.

33. Боковое ребро прямого параллелепипеда 5 м, стороны основания 6 м и 8 м, а одна из диагоналей основания 12м. Найдите диагонали параллелепипеда.

Основание параллелепипеда — параллелограмм $ABCD$ со сторонами AB=6 м, AD=8 м и диагональю AC=12 *м*. Так как в параллелограмме сумма квадратов всех сторон равна сумме квадратов диагоналей, то $2\cdot AB^2 + 2AD^2 = AC^2 + BD^2$. Откуда получаем:

$$BD = \sqrt{2\cdot AB^2 + 2\cdot AD^2 - AC^2} = \sqrt{2\cdot 6^2 + 2\cdot 8^2 - 12^2} = \sqrt{56}\text{ (м)}.$$

Далее, в прямоугольном ΔACC_1 по теореме Пифагора:



$$AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13\text{(м)}.$$

А в прямоугольном ΔBB_1D

$$B_1D = \sqrt{BD^2 + BB_1^2} = \sqrt{\left(\sqrt{56}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{81} = 9\text{(м)}.$$

Ответ: 13 м и 9 м.

34. В прямом параллелепипеде боковое ребро 1м, стороны основания 23 дм и 11 дм, а диагонали основания относятся как 2:3. Найдите площади диагональных сечений.

Основание параллелепипеда — параллелограмм со сторонами $a_1 = 23$дм и $a_2 = 11$дм и диагоналями d_1 и d_2, отношение которых $d_1 : d_2 = 2 : 3$. Пусть $d_1 = 2k$, тогда $d_2 = 3k$.

В параллелограмме сумма квадратов всех сторон равна сумме квадратов диагоналей, так что $2a_1^2 + 2a_2^2 = d_1^2 + d_2^2$, то есть

$2 \cdot 23^2 + 2 \cdot 11^2 = (2k)^2 + (3k)^2$, $13k^2 = 1300$, $k=10$ (дм).

Так что $d_1 = 20$(дм) и $d_2 = 30$(дм). Далее, высота $h = 1$м $= 10$дм и площади диагональных сечений вычисляются по формулам:

$S_1 = d_1 \cdot \text{h} = 20 \cdot 10 = 200(\text{дм}^2) = 2\ (\text{м}^2)$.

$S_2 = d_2 \cdot \text{h} = 30 \cdot 10 = 300(\text{дм}^2) = 3\ (\text{м}^2)$.

Ответ: 2 м^2 и 3 м^2.

35. Найдите диагонали прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: 1) 1, 2, 2; 2) 2, 3, 6; 3) 6, 6, 7.

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений, то есть $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Так что $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$:

1) $d = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$;

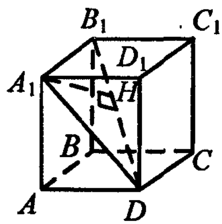
2) $d = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$;

3) $d = \sqrt{6^2 + 6^2 + 7^2} = \sqrt{121} = 11$.

36. Ребро куба равно a. Найдите расстояние от вершины куба до его диагонали, соединяющей две другие вершины.

Имеем $A_1D = a\sqrt{2}$ (из ΔAA_1D). Далее, ΔA_1B_1D — прямоугольный, $A_1B_1 = a$, $A_1D = \sqrt{2}$.

Далее, квадрат диагонали в прямоугольном параллелепипеде равен сумме квадратов трех его измерений, то есть $B_1D^2 = a^2 + a^2 + a^2$, так что $B_1D = a\sqrt{3}$



Площадь ΔA_1B_1D равна:

$S = \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot A_1D = \frac{1}{2} A_1H \cdot B_1D$, так что

$$A_1H = \frac{A_1B_1 \cdot A_1D}{B_1D} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

37. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания 7 дм и 24 дм, а высота параллелепипеда 8 дм.

Найдите площадь диагонального сечения.

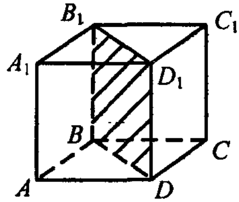
Основание параллелепипеда — прямоугольник со сторонами $a_1 = 7$дм и $a_2 = 24$дм. Тогда его диагональ по теореме Пифагора:

$b = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$ (дм).

Диагональное сечение — это прямоугольник со сторонами $b = 25$ дм и с $= 8$ дм (высота).

Тогда площадь диагонального сечения равна:
$S = b \cdot c = 25 \cdot 8 = 200(\text{дм}^2) = 2(\text{м}^2)$.
Ответ: 2 м^2.

38. Найдите поверхность прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: 10 см, 22 см, 16 см.



Пусть a = 10см, b = 22 см и c = 16 см — измерения параллелепипеда. Так как противоположные грани равны, то и площади их равны. А значит, площадь поверхности параллелепипеда равна:

$S = 2ab + 2bc + 2ac =$

$= 2 \cdot 10 \cdot 22 + 2 \cdot 22 \cdot 16 + 2 \cdot 10 \cdot 16 = 1464$ (см^2).

Ответ: 1464 см^2.

39. Найдите боковую поверхность прямоугольного параллелепипеда, если его высота h, площадь основания Q, а площадь диагонального сечения M.

Основание параллелепипеда — прямоугольник со сторонами $AB = a$ и $AD = b$.

Тогда диагональ BD находим по теореме Пифагора:

$BD = \sqrt{a^2 + b^2}$. А площадь основания равна $Q = AB \cdot AD = a \cdot b$.

Площадь прямоугольника BB_1D_1D, равна $M = BD \cdot h$, так что

$BD = \dfrac{M}{h}$. Следовательно: $\dfrac{M^2}{h^2} = a^2 + b^2$, а $Q = ab$.

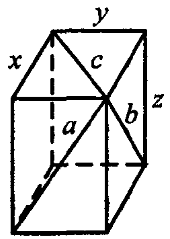
Тогда: $\dfrac{M^2}{h^2} + 2Q = a^2 + b^2 + 2ab$, то есть $\dfrac{M^2}{h^2} + 2Q = (a + b)^2$.

Так что: $a + b = \sqrt{\dfrac{M^2}{h^2} + 2Q}$.

Площадь боковой поверхности равна:

$$S = P \cdot h = 2(a + b)h = 2h\sqrt{\frac{M^2}{h^2} + 2Q} = 2\sqrt{M^2 + 2Qh^2}.$$

40. Диагонали трех граней прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, равны a, b и с. Найдите линейные размеры параллелепипеда.



Пусть x, y, z линейные размеры прямоугольного параллелепипеда. Тогда по теореме Пифагора: $x^2 + y^2 = c^2$.

$y^2 + z^2 = a^2$.
$z^2 + x^2 = b^2$.

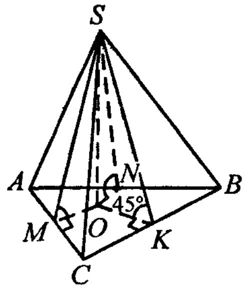
Сложим первые два уравнения и вычтем третье:

$2y^2 = c^2 + a^2 - b^2$. Так что $y = \sqrt{\frac{1}{2}(c^2 + a^2 - b^2)}$.

Аналогично: $2z^2 = a^2 + b^2 - c^2$, $z = \sqrt{\frac{1}{2}(c^2 + a^2 - b^2)}$

и $2x^2 = b^2 + c^2 - a^2$, $x = \sqrt{\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)}$.

41. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 см, а боковая сторона — 10 см. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы, содержащие по 45°. Найдите высоту пирамиды.



Проведем перпендикуляр SO к плоскости основания и перпендикуляры SK, SM и SN к сторонам ΔABC. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OK \perp BC$, $OM \perp AC$ и $ON \perp AB$.

Тогда, $\angle SKO = \angle SMO = \angle SNO = 45°$ — как линейные углы данных двугранных углов. А следовательно, прямоугольные треугольники SKO, SMO и SNO равны по катету и острому углу.

Так что $OK = OM = ON$, то есть точка O является центром окружности, вписанной в ΔABC.

Выразим площадь прямоугольника ABC:

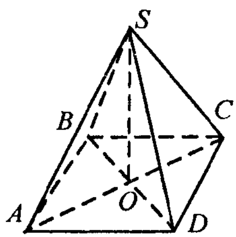
$S = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \sqrt{16\cdot(16-10)\cdot(16-10)\cdot(16-12)} = 48$ (см)

С другой стороны, $S = p \cdot r$. Так что $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3$ (см). $OK = r = 3$ см.

Так как в прямоугольном треугольнике SOK острый угол равен 45°, то ΔSOK является равнобедренным и $SO = OK = 3$ см.

Ответ: 3 см.

42. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Вычислите высоту пирамиды.



Так как $SA = SB = SC = SD$, то прямоугольные треугольники ASO, BSO, CSO и DSO равны по гипотенузе и общему катету SO.

Тогда $AO = BO = CO = DO$, а значит, точка O является точкой пересечения AC и BD.

В ΔABD: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см).

Тогда $OD = \frac{1}{2} BD = 5$ (см).

Далее, в ΔSOD по теореме Пифагора:

$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

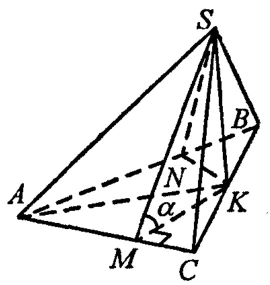
Ответ: 12 см.

43. Основанием пирамиды является правильный треугольник; одна из боковых граней перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к нему под углом α.

Как наклонены к плоскости основания боковые ребра?

Допустим, плоскость SBC перпендикулярна основанию. Тогда $SK \perp BC$ является высотой пирамиды. Проведем $SM \perp AC$ и $SN \perp AB$. По теореме о трех перпендикулярах $KM \perp AC$ и $KN \perp AB$. Значит, $\angle SNK = \angle SMK = \alpha$ как линейные углы данных двугранных углов.

Тогда $\Delta SMK = \Delta SNK$ по катету и острому углу. Так что $MK = NK$. Далее, $\Delta MKC = \Delta NKB$ (так как $MK = NM$ и $\angle C = \angle B = 60°$). Так что $KC = KB = \frac{a}{2}$.



Далее, в ΔCMK:

$MK = KC \cdot \sin 60° = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

В ΔCAK: $AK = AC \cdot \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

В ΔSMK: $SK = MK \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

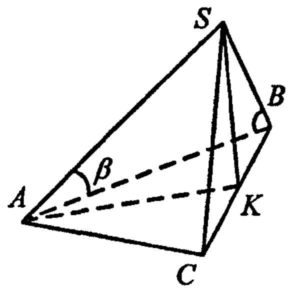
В ΔSCK: $\operatorname{tg}\angle SCK = \frac{SK}{KC} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot 2}{4 \cdot a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}\alpha$.

$\angle SCK = \angle SBK = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg}\alpha\right)$.

В ΔSAK: $\operatorname{tg}\angle SAK = \frac{SK}{AK} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot 2}{4 \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\alpha$.

Так что $\angle SAK = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg}\alpha\right)$.

44. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой a. Каждое боковое ребро образует с плоскостью основания угол β. Найдите ее высоту.



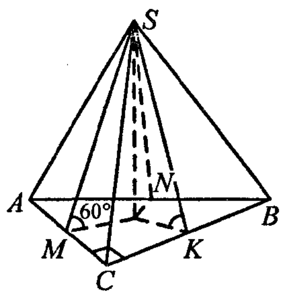
Построим высоту пирамиды SK. Тогда прямоугольные треугольники SAK, SBK, SCK равны по катету и острому углу (SK — общий катет и острые углы β). Так что $AK = BK = CK$, то есть точка K является центром окружности, описанной около основания, так что K лежит на гипотенузе BC и $CK = KB = \frac{a}{2}$.

Далее, в ΔSKC: $SK = KC \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{a\operatorname{tg}\beta}{2}$.

Ответ: $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2}$.

45. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60°.

Найдите высоту пирамиды.



Проведем SO — высоту пирамиды и перпендикуляры SK, SM и SN к соответствующим сторонам ΔABC.

Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OK \perp BC$, $OM \perp AC$ и $ON \perp AB$. Так что $\angle SKO = \angle SMO = \angle SNO = 60°$ — линейные углы данных двугранных углов. Значит, треугольники SKO, SMO и SNO равны по катету и острому углу. Тогда $OM = OK = ON$, то есть точка O является центром окружности, вписанной в основание. В прямоугольном ΔABC:

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см).

Тогда площадь ΔABC равна:

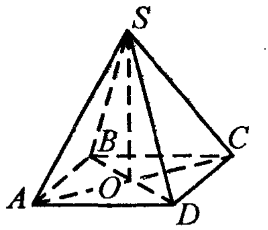
$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ (см^2). С другой стороны, $S = pr$.

Так что $r = \frac{S}{p} = \frac{24}{12} = 2$(см).

Далее, в ΔSMO: $SO = MO \cdot \operatorname{tg} 60° = r \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ (см).

Ответ: $SO = 2\sqrt{3}$

46. Основание пирамиды — параллелограмм, у которого стороны 3 см и 7 см, а одна из диагоналей 6 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей, она равна 4 см. Найдите боковое ребро пирамиды.



Так как основание пирамиды — параллелограмм, то $BO = DO$ и $AO = OC$.

Тогда треугольники AOS и COS равны по двум катетам. Треугольники BOS и DOS также равны.

Так что $BS = DS$ и $AS = CS$. Далее,

$$OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ (см)}.$$

В ΔDOS по теореме Пифагора имеем:

$DS = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$(см). $BS = DS = 5$ см.

Далее, в параллелограмме сумма квадратов всех сторон равна сумме квадратов диагоналей, то есть $2 \cdot AB^2 + 2 \cdot AD^2 = BD^2 \cdot AC^2$.

Так что, $AC = \sqrt{2AB^2 + 2AD^2 - BD^2} = \sqrt{2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 7^2 - 6^2} = \sqrt{80}$ (см).

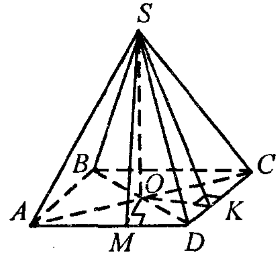
Поэтому $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{80} = \sqrt{20}$ (см) и в прямоугольном ΔAOS по теореме Пифагора получаем:

$$AS = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \sqrt{4^2 + (\sqrt{20})^2} = 6 \text{ (см)}.$$

$CS = AS = 6$ см.

47. Основание пирамиды — ромб с диагоналями 6 м и 8 м; высота пирамиды проходит через точку пересечений диагоналей ромба и равна 1 м. Найдите боковую поверхность пирамиды.

$\Delta AOD = \Delta COD$ (так как $AO = OC = \frac{1}{2}AC$ и OD — общая).



Тогда высоты $OM = OK$. Значит, прямоугольные ΔSOM и ΔSOK равны по двум катетам. Так что $SM = SK$.

Поэтому во всех боковых гранях высоты, проведенные к сторонам основания, равны. Так что площадь боковой поверхности равна

$$S_{бок} = \frac{1}{2}P \cdot SM = \frac{1}{2} \cdot 4AD \cdot SM = 2 \cdot AD \cdot SM.$$

Так в ΔAOD: $AO = \frac{1}{2}AC = 4$ м, а $OD = \frac{1}{2}BD = 3$ м.

Так что по теореме Пифагора $AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = 5$ (см).

Далее, площадь ΔAOD равна: $S = \frac{1}{2} AO \cdot OD = \frac{1}{2} OM \cdot AD$.

$OM = \frac{AO \cdot OD}{AD} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2{,}4$ (м). Тогда в ΔSOM:

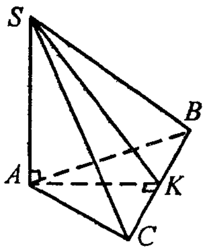
$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{(2{,}4)^2 + 1^2} = 2{,}6$ (м).

и $S_{бок} = 2 \cdot AD \cdot SM = 2 \cdot 5 \cdot 2{,}6 = 26$(м^2).

Ответ: 26 м^2.

48. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник со сторонами 40 см, 25 см и 25 см. Ее высота проходит через вершину угла, противолежащего стороне 40 см, и равна 8 см.

Найдите боковую поверхность пирамиды



В ΔABC $AB = AC = 25$см и $BC = 40$ см.

Проведем $AK \perp BC$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $SK \perp BC$.

$S_{ASC} = S_{ASB} = \frac{1}{2} AS \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 8 = 100$ (см^2).

Далее, $KC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 40 = 20$ (см).

Так что в ΔACK:

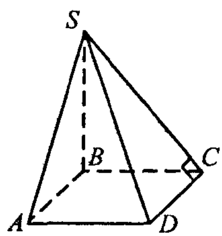
$AK = \sqrt{AC^2 - KC^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$ (см). Далее, в ΔASK:

$SK = \sqrt{AS^2 + AK^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ (см). Поэтому площадь ΔSBC равна:

$S_{SBC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot SK = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 17 = 340$ (см^2). Так что площадь боковой поверхности равна $S_{бок} = S_{ASC} + S_{ASB} + S_{SBC} = 100 + 100 + 340 = 540$ (см^2).

Ответ: 540 см^2.

49. Основание пирамиды — квадрат, ее высота проходит через одну из вершин основания. Найдите боковую поверхность пирамиды, если сторона основания равна 20 дм, а высота — 21 дм.



Пусть SB — высота. Так как $ABCD$ квадрат, то $AB = BC = CD = AD = 20$ дм, $AB \perp AD$ и $BC \perp DC$. Тогда, по теореме о трех перпендикулярах $AS \perp AD$ и $CS \perp DC$.

Далее, треугольники ASB и CSB равны по двум катетам, а значит, их площади также равны.

$S_{ABS} = S_{CBS} = \frac{1}{2} AB \cdot SB = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 210$ (дм^2).

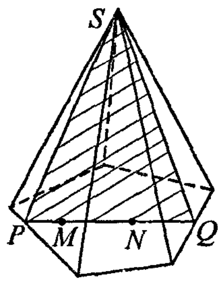
Далее, в ΔASB: $AS = \sqrt{AB^2 + SB^2} = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29$ (дм). Так как $\Delta SAB = \Delta SCB$, то $AS = SC$, и прямоугольные треугольники ASD и CSD равны по двум катетам, а значит, их площади тоже равны:

$S_{ASD} = S_{CSD} = \dfrac{1}{2} AD \cdot AS = \dfrac{1}{2} \cdot 20 \cdot 29 = 290$ (дм^2).

Так что $S_{бок} = 2S_{ABS} + 2S_{ASD} = 2 \cdot 210 + 2 \cdot 290 = 1000$ (дм^2) $= 10$ (м^2).

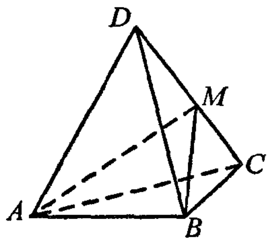
Ответ: 10 м^2.

50. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и две данные точки на ее основании.



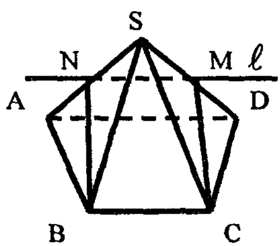
Пусть данные точки M и N, лежащие на основании пирамиды. Тогда MN пересекает ребра пирамиды в некоторых точках P и Q. Так как точка P лежит с вершиной S в одной плоскости, то можно провести отрезок PS. Так как точка Q лежит с вершиной S в одной плоскости, то можно провести отрезок QS. Так что SQP — искомое сечение.

51. Постройте сечение треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания пирамиды и данную точку на противолежащем ребре.



Так как точки B и M лежат в одной плоскости DBC, то можно провести отрезок MB, так как точки A и M лежат в одной плоскости ADC, то можно провести отрезок AM. AMB — искомое сечение, так как $AB \in AMB$ и $M \in AMB$.

52. Постройте сечение четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и точку на одном из боковых ребер.



Пусть M точка на боковом ребре. Сторона BC принадлежит сечению.

Тогда возможны два случая:

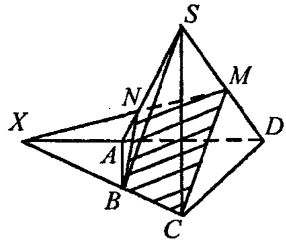
1) $BC \parallel AD$. Тогда через точку M проведем прямую, параллельную AD и лежащую в плоскости (ASD), которая пересечет прямую AS в некоторой точке N. Тогда $MN \parallel BC$. Через 2 параллельные прямые можно провести плоскость. Так что $BNMC$ — искомое сечение.

2) BC не параллельно AD (общий случай).

Тогда проведем прямые AD и BC до пересечения в точке X.

Далее, прямая XM пересекает AS в некоторой точке N.

Тогда $BNMC$ — искомое сечение.



53. У четырехугольной усеченной пирамиды стороны одного основания равны 6, 7, 8, 9 см, а меньшая сторона другого основания равна 5 см. Найдите остальные стороны этого основания.

У усеченной пирамиды основания подобны. Зная меньшие стороны нижнего и верхнего оснований, найдем коэффициент подобия: $k = \frac{5}{6}$.

Тогда соответствующие стороны равны

$7 \cdot k = 7 \cdot \frac{5}{6} = = \frac{35}{6}$ (см),

$8 \cdot k = 8 \cdot \frac{5}{6} = \frac{20}{3}$ (см) и

$9 \cdot k = 9 \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{2}$ (см).

54. Боковое ребро пирамиды разделено на четыре равные части, и через точки деления проведены плоскости параллельные основанию. Площадь основания равна 400 см^2.

Найдите площади оснований.

Задача решена в учебнике п. 49 (183), стр. 78.

55. Высота пирамиды равна 16 м. Площадь основания равна 512м^2. На каком расстоянии от основания находится сечение, параллельное ему, если площадь сечения 50 м^2?

Сечение, параллельное основанию, отсекает от данной пирамиды другую пирамиду, подобную данной. Отношение площадей подобных фигур равны квадрату коэффициента подобия.

Так что имеем по условию $k^2 = \frac{50}{512}$. Так что $k = \frac{5}{16}$. Отношение высот равно коэффициенту подобия. Так что высота меньшей пирамиды равна $x = k \cdot 16$ м $= 5$ м. А значит, расстояние, на котором находится сечение от основания, равно $h = 16 - x = 11$ (м).

Ответ: 11 м.

56. В правильной треугольной пирамиде с высотой h через сторону основания а проведена плоскость, пересекающая противолежащее боковое ребро под прямым углом. Найдите площадь сечения.

Пусть $ABCS$ пирамида, ABC — правильный треугольник.

Плоскость ADC перпендикулярна ребру BS. Тогда треугольники ADB, CDB и MDB прямоугольные.

$\Delta ADB = \Delta CDB$ по гипотенузе и катету ($AB = BC = a$ и DB — общий катет). Так что $AD = DC$.

Следовательно, BM и DM — медианы и высоты треугольников.

Тогда $BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (так как ABC — равносторонний).

Высота SH в правильной пирамиде проходит через центр окружности, описанной около основания. Так что $HB = R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Далее, в прямоугольном ΔSHB:

$$SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{3h^2 + a^2}{3}}$$

В прямоугольных ΔSHB и ΔMDB острый угол $\angle SBM$ — общий. Значит, $\Delta SHB \sim \Delta MDB$ по двум углам. Так что

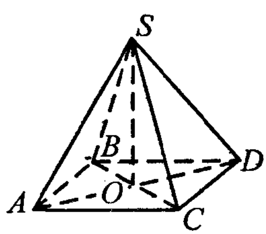
$\dfrac{MD}{SH} = \dfrac{MB}{SB}$, откуда получаем, что

$$MD = \frac{SH \cdot MB}{SB} = \frac{h \cdot a\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{\dfrac{3h^2 + a^2}{3}}} = \frac{3ha}{2\sqrt{3h^2 + a^2}}.$$

А площадь сечения находим по формуле:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot MD = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{3ha}{2\sqrt{3h^2 + a^2}} = \frac{3ha^2}{4\sqrt{3h^2 + a^2}}.$$

57. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7 см, а сторона основания — 8 см. Найдите боковое ребро.



Высота правильной пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания. Так как основание данной пирамиды — квадрат, то O — точка пересечения диагоналей.

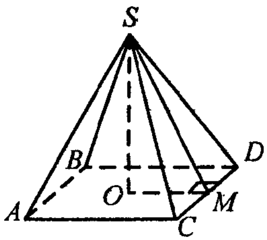
Так что $OC = \dfrac{1}{2} BC = \dfrac{1}{2} AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (см).

Далее, в прямоугольном ΔSOC по теореме Пифагора находим

$SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{7^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{81} = 9$ (см).

Ответ: 9 см.

58. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Найдите двугранный угол x при основании пирамиды.



Высота SO правильной четырехугольной пирамиды проходит через центр пересечения диагоналей AD и BC.

Проведем $SM \perp DC$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OM \perp DC$.

Значит, OM — радиус окружности, вписанной в квадрат, поэтому $OM = \frac{AB}{2}$. В равнобедренном ΔDSC $\angle DSC = \alpha$. Высота SM является медианой и биссектрисой, так что

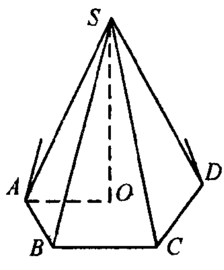
$$\angle CSM = \frac{\alpha}{2}, \text{ а } CM = \frac{AB}{2}. \text{ В } \Delta SMC: SM = \frac{CM}{tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{AB}{2tg\frac{\alpha}{2}}.$$

Так как $\angle SMO$ является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостью основания и боковой гранью, то $\angle SMO = x$ и из ΔSMO:

$$\cos x = \cos \angle SMO = \frac{OM}{SM} = \frac{AB \cdot 2tg\frac{\alpha}{2}}{2 \cdot AB} = tg\frac{\alpha}{2}.$$

Так что $x = \arccos\left(\text{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

59. По данной стороне a и боковому ребру b найдите высоту правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.



В правильной пирамиде высота SO проходит через центр окружности, описанной около основания. Значит, $AO = R$. А из ΔASO:

$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{b^2 - R^2}$ Тогда:

1) В равностороннем треугольнике $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

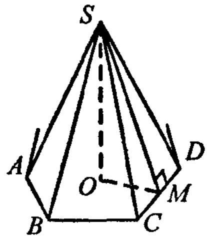
Значит, $SO = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$.

2) В квадрате $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Так что

$$SO = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}.$$

3) В правильном шестиугольнике $R = a$. Поэтому $SO = \sqrt{b^2 - a^2}$.

60. По данной стороне основания a и высоте b найдите апофему правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.



В правильной пирамиде высота SO проходит через центр окружности, вписанной в основание. Пусть SM — апофема. То есть $SM \perp DC$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OM \perp DC$. Значит, $OM = r$.

Далее, по теореме Пифагора в ΔSOM:

$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{b^2 + r^2}$. Тогда

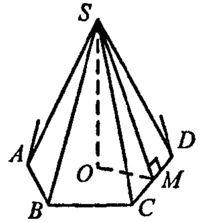
1) В правильном треугольнике $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. Так что

$$SM = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{12}}.$$

2) В квадрате $r = \dfrac{a}{2}$; так что $SM = \sqrt{b^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 + \dfrac{a^2}{4}}$.

3) В правильном шестиугольнике $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; так что

$$SM = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 + \frac{3a^2}{4}}$$



61. По стороне основания a и высоте b найдите полную поверхность правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

В правильной пирамиде апофема

$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{b^2 + r^2}$ (смотри задачу № 60).

Полная поверхность $S = S_{осн} + S_{бок}$.

Так как боковая поверхность состоит из n равных треугольников с основанием a и высотой, равной апофеме SM, то

$$S_{бок} = n \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot SM = \frac{1}{2}(na) \cdot SM = \frac{1}{2} P \cdot \sqrt{b^2 + r^2},$$

где P — периметр основания. Тогда

1) В правильном треугольнике $S_{осн} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Тогда $S_{бок} = \dfrac{1}{2} \cdot 3a \cdot \sqrt{b^2 + \dfrac{a^2}{12}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\sqrt{12b^2 + a^2}$. Так что

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a\sqrt{3}}{4}\sqrt{12b^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}\left(a + \sqrt{12b^2 + a^2}\right).$$

2) В квадрате $S_{осн} = a^2$ и $r = \dfrac{a}{2}$. Так что

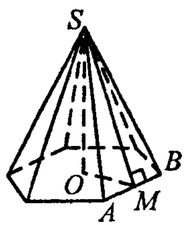
$S_{бок} = \dfrac{1}{2} \cdot 4a\sqrt{b^2 + \dfrac{a^2}{4}} = a \cdot \sqrt{4b^2 + a^2}$. Тогда $S = a^2 + a \cdot \sqrt{4b^2 + a^2}$

3) В правильном шестиугольнике $S_{осн} = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ и

$r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Так что $S_{бок} = \dfrac{1}{2} \cdot 6a \cdot \sqrt{b^2 + \dfrac{3a^2}{4}} = \dfrac{3a}{2} \cdot \sqrt{4b^2 + 3a^2}$.

Поэтому $S = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3a}{2} \cdot \sqrt{4b^2 + 3a^2} = \dfrac{3a}{2}\left(a\sqrt{3} + \sqrt{4b^2 + 3a^2}\right)$.

62. Найдите полную поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если ее боковое ребро a, а радиус окружности, вписанной в основание, r.



В правильном шестиугольнике сторона выражается через радиус вписанной окружности по формуле: $AB = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Далее, площадь правильного шестиугольника равна:

$$S_{осн} = 6 \cdot \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{4 \cdot r^2 \cdot 3}{9} = 2r^2\sqrt{3}.$$

Далее, в ΔSMB: $MB = \dfrac{1}{2}AB = r\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $SB = a$.

Тогда по теореме Пифагора: $SM = \sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{r^2}{3}}$.

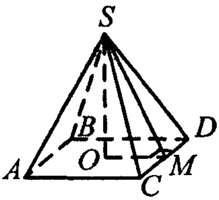
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна $S_{бок}=\frac{1}{2}\cdot P\cdot SM$, где P – периметр основания (SM – апофема). Так что

$$S_{бок} = \frac{1}{2}\cdot 6AB\cdot SM = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot\frac{2r\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{b^2-\frac{r^2}{3}} = 2r\sqrt{3b^2-r^2}.$$

Тогда площадь полной поверхности равна:

$$S = 2r^2\sqrt{3}+2r\sqrt{3b^2-r^2} = 2r(r\sqrt{3}+\sqrt{3b^2-r^2}).$$

63. В правильной четырехугольной пирамиде боковая поверхность равна 14,76 м^2, а полная поверхность — 18 м^2. Найдите сторону основания и высоту пирамиды.



Площадь основания равна разности площадей полной и боковой поверхности. То есть $S_{осн} = S - S_{бок} = 18 - 14{,}76 = 3{,}24(\text{м}^2)$

Так как $ABCD$ — квадрат, то $AB=\sqrt{S_{осн}} = \sqrt{3{,}24} = 1{,}8$ (м).

Так как в правильной пирамиде

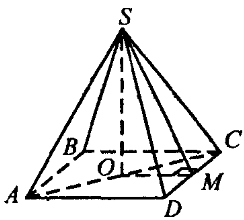
$S_{бок} = \frac{1}{2}\cdot P\cdot h$, где P — периметр основания и h — апофема, то получаем, что $h = SM = \frac{2S_{бок}}{P} = \frac{2\cdot S_{бок}}{4\cdot AB} = \frac{2\cdot 14{,}76}{4\cdot 1{,}8} = 4{,}1$ (м).

Далее, по теореме Пифагора в ΔSOM:

$SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{4{,}1^2-0{,}9^2} = 4$(м), так как $OM = \frac{1}{2}AB = 0{,}9$(м).

Ответ: 1,8 м и 4 м.

64. По стороне основания a найдите боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, у которой диагональное сечение равновелико основанию.



Диагональное сечение представляет собой ΔASC с высотой SO, равной высоте пирамиды, и основанием AC, являющимся диагональю квадрата $ABCD$. Так что $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Так как диагональное сечение равновелико основанию, то получаем: $\frac{1}{2}AC\cdot SO = AD^2$ и $SO = \frac{2a^2}{a\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

Далее, в ΔSOM по теореме Пифагора:

$$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = 1{,}5a.$$

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна $S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot SM$, где P — периметр основания (SM — апофема).

Так что $S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 1{,}5a = 3a^2$.

Ответ: $3a^2$.

65. Найдите боковую поверхность пирамиды, если площадь основания Q, а двугранные углы при основании φ.

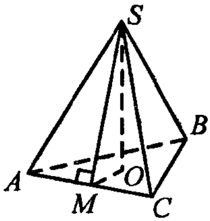
Площадь основания равна сумме ортогональных проекций боковых граней, а боковые грани составляют с основанием равные углы φ, поэтому $S_{бок} = \frac{Q}{\cos\varphi}$.

66. Найдите двугранные углы при основании правильной пирамиды, у которой площадь основания равна Q, а боковая поверхность S.

Как и в предыдущей задаче:

$S_{бок} = \frac{Q}{\cos\varphi}$. Так что $\cos\varphi = \frac{Q}{S}$, $\varphi = \arccos\frac{Q}{S}$.

67. Найдите сторону основания и апофему правильной треугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно 10 см, а боковая поверхность равна 144 см^2.



Пусть $AB = BC = AC = x$, а $SM = y$ — апофема. Тогда из ΔASM по теореме Пифагора имеем: $AS^2 = AM^2 + SM^2$, то есть

$10^2 = \frac{x^2}{4} + y$ или $400 = x^2 + 4y^2$.

Так как площадь боковой поверхности правильной пирамиды $S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot h$, где P — периметр основания и h — апофема, то $144 = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot y$, то есть $xy = 96$. Имеем:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 400 \\ xy = 96 \end{cases}$$

$x^2 + 4xy + 4y^2 = 400 + 4 \cdot 96$;

$(x + 2y)^2 = 784$;

$x + 2y = 28$;

$x = 28 - 2y$. Тогда $96 = (28 - 2y)y$,

$96 = 28y - 2y^2$,

$y^2 - 14y + 48 = 0$; $y = 6$ или $y = 8$. Тогда $x = 16$ или $x = 12$.

Ответ: 16 см и 6 см или 12 см и 8 см.

68. В правильной четырехугольной пирамиде найдите сторону основания, если боковое ребро равно 5 см, а полная поверхность — 16 см^2.

Пусть $AB = BC = CD = AD = x$, а $SM = y$ — апофема.

Тогда по теореме Пифагора в ΔSMC:

$SC^2 = SM^2 + MC^2$, $5^2 = y^2 + \dfrac{x^2}{4}$, то есть $x^2 + 4y^2 = 100$.

Полная поверхность равна $S = S_{осн} + S_{бок}$, где $S_{осн}$ — площадь квадрата, то есть $S_{осн} = x^2$ и $S_{бок} = \dfrac{1}{2} \cdot P \cdot h$, где P — периметр основания и h — апофема, так что $S_{бок} = 2xy$.

Так что $x^2 + 2xy = 16$. Имеем:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 100 \\ x^2 + 2xy = 16 \end{cases}, \quad y = \frac{16 - x^2}{2x}$$

Так что $x^2 + 4\left(\dfrac{16 - x^2}{2x}\right)^2 = 100$, то есть

$x^4 - 100x^2 + (16 - x^2)^2 = 0$

$x^4 - 66x^2 + 128 = 0$. Пусть $x^2 = a$, тогда

$a^2 - 66a + 128 = 0$, $a = 2$ или $a = 64$. Тогда $x = \sqrt{2}$ или $x = 8$.

Но при $x = 8$ площадь основания больше полной.

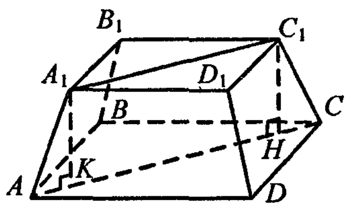
Так что $x = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$ см.

69. Докажите, что боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

Задача решена в учебнике п. 50 (184), стр. 79.

70. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см. Стороны оснований равны 10 см и 2 см. Найдите боковое ребро пирамиды.



Рассмотрим диагональное сечение AA_1C_1C, $AA_1 = CC_1$ и $A_1C_1 \| AC$. Так что AA_1C_1C — равнобедренная трапеция.

A_1C_1 и AC — диагонали квадратов, лежащих в основании усеченной пирамиды. Значит,

$A_1C_1 = A_1B_1 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (см) и $AC = AB \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ (см).

Так как $A_1K \perp AC$ и $C_1H \perp AC$ то A_1C_1HK — прямоугольник и $A_1K = C_1H = 7$ см. Прямоугольные треугольники AA_1K и CC_1H равны по гипотенузе и катету. Так что $AK = CH$. Тогда

$$CH = AK = \frac{1}{2}(AC - A_1C_1) = \frac{1}{2}(10\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} \text{ (см.)}$$

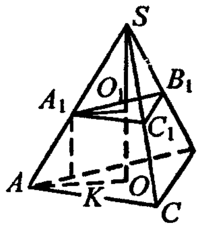
Далее, по теореме Пифагора в ΔAA_1K:

$$AA_1 = \sqrt{AK^2 + A_1K^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 + 7^2} = \sqrt{32 + 49} = \sqrt{81} = 9 \text{ (см).}$$

Ответ: 9 см.

71. Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды 4 дм и 1 дм. Боковое ребро 2 дм.

Найдите высоту пирамиды.



Дополним усеченную пирамиду до полной. Так как в правильной пирамиде высота проходит через центр окружности, описанной около основания, то точки O и O_1 — центры описанных вокруг ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ окружностей.

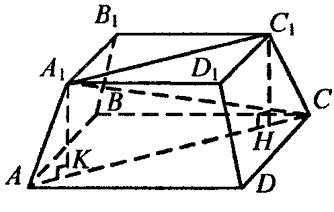
Тогда $AO = R_1 = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ (дм) и $A_1O_1 = R_2 = \dfrac{A_1B_1\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (дм).

AA_1O_1O — прямоугольная трапеция. Проведем $A_1K \perp AO$. Тогда A_1O_1OK — прямоугольник, и $A_1O_1 = KO = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (дм). Так что

$AK = AO - KO = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ (дм). Далее, в ΔAA_1K по теореме Пифагора: $A_1K = \sqrt{AA_1^2 - AK^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$ (дм).

Ответ: 1 дм.

72. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 2 см, а стороны оснований — 3 см и 5 см. Найдите диагональ этой пирамиды.



Диагональным сечением данной пирамиды является равнобокая трапеция AA_1C_1C.

Так как A_1C_1 и AC — диагонали квадратов, $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$, то

$A_1C_1 = A_1B_1 \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ (см) и $AC = AB \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ (см).

Проведем $A_1K \perp AC$ и $C_1H \perp AC$. Тогда A_1C_1HK — прямоугольник и $A_1C_1 = KH$. Так что, прямоугольные треугольники AA_1K и CC_1H равны по гипотенузе и катету. Тогда,

$$AK = CH = \frac{1}{2}(AC - A_1C_1) = \frac{1}{2}(5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

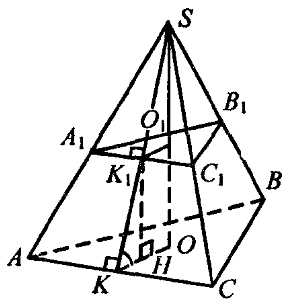
Тогда $CK = AC - AK = 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (см)

и по теореме Пифагора в ΔA_1CK:

$$A_1C = \sqrt{A_1K^2 + CK^2} = \sqrt{2^2 + (4\sqrt{2})^2} = 6 \text{ (см)}.$$

Ответ: 6 см.

73. Стороны оснований усеченной правильной треугольной пирамиды 2 см и 6 см. Боковая грань образует с большим основанием угол 60°. Найдите высоту.



Дополним усеченную пирамиду до полной. Так как в правильной пирамиде высота проходит через центр окружности, вписанной в основание, то O и O_1 — центры окружностей, вписанных в ABC и $A_1B_1C_1$.

Проведем $SK \perp AC$, а значит, и $SK_1 \perp A_1C_1$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OK \perp AC$ и $OK_1 \perp A_1C_1$. Значит, OK и O_1K_1 — радиусы окружностей, вписанных в правильные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

Так что, $OK = \dfrac{AB \cdot \sqrt{3}}{6} = \dfrac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$ (см) и

$O_1K_1 = \dfrac{A_1B_1 \cdot \sqrt{3}}{6} = \dfrac{2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (см). Далее, проведем $K_1H \perp KO$. Тогда K_1O_1OH — прямоугольник, значит, $K_1H = OO_1$.

Так как $\angle K_1KH$ является линейным углом двугранного угла между основанием и боковой гранью, то $\angle K_1KH = 60°$ (по условию).

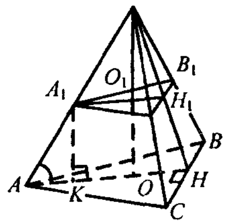
Тогда в ΔK_1KH: $K_1H = KH \cdot \text{tg}\angle K_1KH = \sqrt{3}\, KH$.

$$KH = KO - OH = KO - K_1O_1 = \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Так что $K_1H = \sqrt{3} \cdot \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = 2$ (см). $OO_1 = K_1H = 2$ см

Ответ: 2 см.

74. В правильной усеченной треугольной пирамиде сторона большего основания a, сторона меньшего b. Боковое ребро образует с основанием угол 45°. Найдите площадь сечения, проходящего через боковое ребро и ось пирамиды.



Так как в правильной пирамиде высота проходит через центр окружности, описанной около основания, а ось правильной усеченной пирамиды совпадает с осью соответствующей полной пирамиды, то O и O_1 — центры окружностей, описанных около $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC. Так что

$A_1O_1 = R_1 = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}$ и $AO = \mathrm{R}_2 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Далее, проведем $A_1K \perp AO$. Так что A_1O_1OK — прямоугольник, поэтому $A_1O_1 = KO$. Тогда $AK = AO - KO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} - \dfrac{b\sqrt{3}}{3} = (a-b)\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Далее, в прямоугольном ΔAA_1K $\angle AA_1K = 45°$. Так что,

$A_1K = AK = (a-b)\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. В правильном треугольнике ABC $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

а в $\Delta A_1B_1C_1$: $A_1H_1 = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$. Площадь сечения равна площади трапеции

AA_1H_1H и равна: $S = \dfrac{AH + A_1H_1}{2} \cdot A_1K = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2} + \dfrac{b\sqrt{3}}{2}\right) \cdot (a-b)\dfrac{\sqrt{3}}{3} =$

$= \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}(a+b)(a-b) = \dfrac{1}{4}(a^2 - b^2)$.

Ответ: $\dfrac{1}{4}(a^2 - b^2)$.

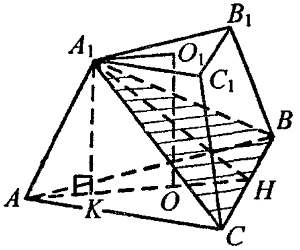
75. Высота правильной четырехгранной усеченной пирамиды равна 4 см. Стороны оснований равны 2 см и 8 см.

Найдите площади диагональных сечений.

В диагональном сечении находится трапеция с высотой, равной высоте пирамиды — 4 см, и основаниями, равными диагоналям оснований, то есть квадратов со сторонами 2 см и 8 см. Так что основания трапеции равны $2\sqrt{2}$ см и $8\sqrt{2}$ см. Следовательно площадь сечения равна: $S = \dfrac{8\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} \cdot 4 = 20\sqrt{2}$ (см^2).

Ответ: $20\sqrt{2}$.

76. В правильной треугольной усеченной пирамиде сторона нижнего основания 8м, верхнего — 5м, а высота 3 м. Проведите сечение через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания.



Найдите площадь сечения и двугранный угол между сечением и нижним основанием.

Ось правильной усеченной пирамиды совпадает с осью соответствующей полной пирамиды, поэтому OO_1 является высотой усеченной пирамиды, а точки O и O_1 — центры окружностей, описанных около треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

Тогда $A_1O_1 = \dfrac{A_1B_1\sqrt{3}}{3} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ (м) и $AO = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ (м).

Далее, проведем $AH \perp BC$ в ΔABC. Так как ΔABC — равносторонний, то $AH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ (м).

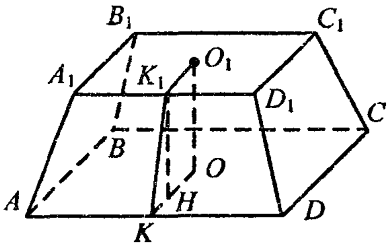
Далее, по теореме о трех перпендикулярах $AH \perp BC$ (в ΔA_1BC). Тогда $\angle A_1HA$ — линейный угол искомого двугранного угла. Проведем $A_1K \perp AH$. Тогда из прямоугольника A_1O_1OK получаем, что: $A_1O_1 = KO$. Так что $AK = AO - KO = \dfrac{8\sqrt{3}}{3} - \dfrac{5\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ (м).

Тогда $KH = AH - AK = 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ (м). Далее, в прямоугольном ΔA_1KH $\operatorname{ctg}\angle A_1HK = \dfrac{KH}{A_1K} = \dfrac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$, так что $\angle A_1HK = 30°$.

Далее, по теореме Пифагора в ΔA_1KH:
$A_1H = \sqrt{A_1K^2 + KH^2} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$(м). Так что площадь сечения равна $S_{A_1BC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot A_1H = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$ (м^2).

Ответ: 24 м^2 и 30°.

77. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований 8 м и 2 м. Высота равна 4 м. Найдите полную поверхность.



Так как ось правильной усеченной пирамиды совпадает с осью соответствующей полной пирамиды, то OO_1 является высотой пирамиды и точки O и O_1 являются центрами окружностей, вписанных в квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Тогда проведем $OK \perp AD$ и $OK_1 \perp A_1D_1$.

Значит, OK и O_1K_1 — радиусы вписанных окружностей $OK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4$(м) и $O_1K_1 = \frac{1}{2}A_1B_1 = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$ (м).

Далее, проведем $K_1H \perp KO$. Из прямоугольника K_1O_1OH следует, что $OK = O_1K_1 = 1$ м. Так что $KH = KO - OH = 4 - 1 = 3$ (м.)

Далее, из прямоугольного ΔKK_1H найдем по теореме Пифагора: $KK_1 = \sqrt{KH^2 + K_1H^2} = \sqrt{3^3 + 4^2} = 5$(м), где KK_1 — апофема.

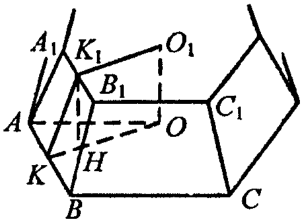
Далее, площадь полной поверхности $S = S_{ABCD} + S_{A_1B_1C_1D_1} + S_{,бок}$

$S_{бок} = 4\cdot\frac{A_1D_1 + AD}{2}\cdot K_1K = 4\cdot\frac{8+1}{2}\cdot 5 = 100$ (м^2).

$S_{ABCD} = AB = 8^2 = 64$ (м^2). $S_{A_1B_1C_1D_1} = A_1B_1{}^2 = 2^2 = 4$ (м^2).

Ответ: 168 м^2.

78. Найдите полную поверхность правильной усеченной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной, если высота h, а стороны оснований a и b.



Проведем $OK \perp AB$ и $OK_1 \perp A_1B_1$.

Высота $OO_1 = h$ проходит через центры окружностей, вписанных в основания. Так что $OK = r_1$ и $O_1K_1 = r_2$.

Тогда в прямоугольном ΔKK_1H: $KH = OK - OH = O_1K_1 = r_1 - r_2$ и по теореме Пифагора:

$KK_1 = \sqrt{K_1H^2 + KH^2} = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$ — апофема.

Площадь полной поверхности равна сумме площадей S_1 и S_2 оснований и площади боковой поверхности. $S_{бок} = \frac{P_1 + P_2}{2}\cdot KK_1$, где P_1 и P_2 — периметры оснований. Тогда:

1) В треугольной пирамиде $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и $S_2 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$, $P_1 = 3a$, $P_2 = 3b$, $r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ и $r_2 = \frac{b\sqrt{3}}{6}$. Так что $KK_1 = \sqrt{h^2 + \frac{(a-b)^2}{12}}$ и

$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a + 3b}{2}\cdot\sqrt{h^2 + \frac{(a-b)^2}{12}} =$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2+b^2+(a+b)\sqrt{12h^2+(a-b)^2}\right).$$

2) В четырехугольной пирамиде

$S_1=a^2, S_2=b^2, P_1=4a, P_2=4b, r_1=\dfrac{a}{2}$ и $r_2=\dfrac{b}{2}$.

Так что $KK_1=\sqrt{h^2+\dfrac{(a-b)^2}{4}}$ и

$$S=S_1+S_2+S_{бок}=a^2+b^2+\frac{4a+4b}{2}\cdot\sqrt{h^2+\frac{(a-b)^2}{4}}=$$

$$=a^2+b^2+(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2}.$$

3) В шестиугольной пирамиде $S_1=6\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$,

$S_2=6\cdot\dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3b^2\sqrt{3}}{2}$, $P_1=6a, P_2=6b, r_1=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ и $r_2=\dfrac{b\sqrt{3}}{2}$.

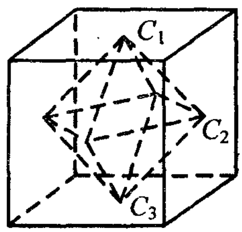
Так что $KK_1=\sqrt{h^2+\dfrac{3}{4}(a^2-b^2)}$ и

$$S=S_1+S_2+S_{бок}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}+\frac{3b^2\sqrt{3}}{2}+\frac{6a+6b}{2}\times$$

$$\times\sqrt{h^2+\frac{3(a-b)^2}{4}}=\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}\cdot(a^2+b^2)+(a+b)\sqrt{4h^2+3(a-b)^2}\right)$$

79. Докажите, что центры граней куба являются вершинами октаэдра, а центры граней октаэдра являются вершинами куба.

Обозначим центры граней куба $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.



Каждая грань куба граничит с четырьмя другими, так что каждая из точек C будет соединена с четырьмя другими. Так как расстояния между центрами граней, имеющих общее ребро, в кубе одинаковы, то получим фигуру, имеющую 6 вершин, в каждой из которых сходится по n ребер, и все грани представляют собой правильные треугольники.

Значит, эта фигура — октаэдр.

Наоборот:

Обозначим центры граней октаэдра $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$.

Каждая грань октаэдра граничит с тремя другими, так что центр каждой грани будет соединен ребрами с тремя соседними центрами. Так как расстояния между центрами граней, имеющих общее ребро, одинаковы, то получится фигура, имеющая восемь вершин; из каждой вершины выходят по три одинаковых ребра и все грани представляют собой квадраты.

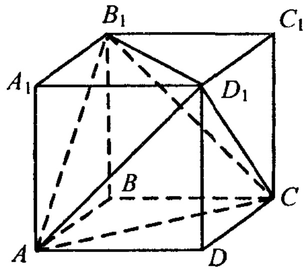
Значит, эта фигура — куб.

Что и требовалось доказать.

80. Докажите, что концы двух непараллельных диагоналей противолежащих граней куба являются вершинами тетраэдра.

Соединим концы непараллельных диагоналей противолежащих граней AB_1 и CD_1.

Рассмотрим полученную фигуру AB_1D_1C. В каждой из четырех $A_1B_1D_1$ и C вершин сходятся три ребра. А также все отрезки AB_1, AD_1, AC, B_1D_1, D_1C и B_1C являются диагоналями равных квадратов и, значит, равны между собой. Так что фигура AB_1D_1C составлена из четырех правильных треугольников, то есть является тетраэдром.



Что и требовалось доказать.

81. Найдите двугранные углы правильного тетраэдра.

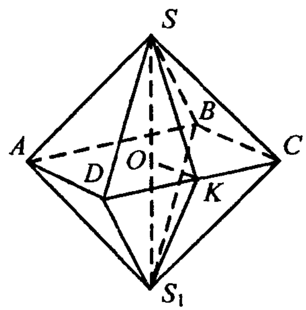
Задача решена в учебнике п. 51 (185), стр. 80.

82. Найдите двугранные углы октаэдра.

Проведем ось SS_1, которая перпендикулярна плоскости $ABCD$.

Так как верхняя часть октаэдра — правильная пирамида, то O — центр окружности, вписанной в квадрат $ABCD$.

Обозначим ребро октаэдра x. Тогда, если $OK \perp DC$, то $OK = r = \frac{x}{2}$.



Проведем SK и S_1K, тогда по теореме о трех перпендикулярах имеем $SK \perp DC$ и $S_1K \perp DC$. Так что $\angle SKS_1$ — линейный угол искомого двугранного угла.

Из правильного ΔSDC: $SK = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, а из ΔS_1DC: $S_1K = \frac{x\sqrt{3}}{2} = SK$.

Далее, из прямоугольного ΔSOK по теореме Пифагора получаем:

$SO = \sqrt{SK^2 - OK^2} = \sqrt{\frac{x^2 3}{4} - \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{2}}{2} = OS_1$. Так что $SS_1 = 2OS = x\sqrt{2}$.

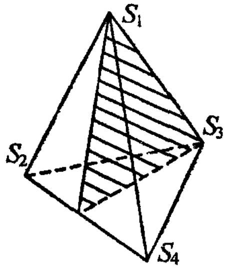
По теореме косинусов в ΔSKS_1:

$SS_1^2 = SK^2 + S_1K^2 - 2SK \cdot S_1K \cdot \cos\angle SKS_1$. То есть,

$x^2 \cdot 2 = \frac{x^2 \cdot 3}{4} + \frac{x^2 \cdot 3}{4} - 2 \cdot \frac{x \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \cos\alpha$. Так что, $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

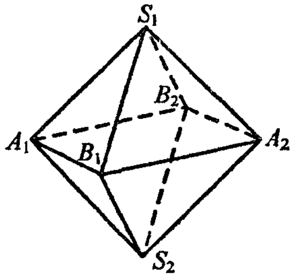
Тогда $\alpha \approx 109°28'$. Остальные двугранные углы равны найденному.

83. Какие плоскости симметрии имеет правильный тетраэдр?



Правильный тетраэдр имеет плоскости симметрии, проходящие через какое-либо ребро, перпендикулярно противоположному ребру. Так как ребер 6, то и плоскостей симметрии 6.

84. Сколько плоскостей симметрии у правильного октаэдра, додекаэдра и икосаэдра?



В октаэдре через пару противоположных вершин S_1 и S_2 проходят четыре плоскости симметрии (две из них проходят через ребра A_1S_1, и A_2S_1 а также B_1S_1 и B_2S_1.

Еще две плоскости проходят через ось S_1S_2 перпендикулярно ребрам A_1B_1 и A_2B_1, а также ребрам B_1A_2 и A_2B_2.

Далее, через пару противоположных вершин A_1, A_2 по тем же соображениям проходят четыре плоскости симметрии; но одна из них, проходящая через A_1S_1 и A_2S_1 уже была учтена.

Так что есть еще три плоскости симметрии.

Через пару противоположных вершин B_1B_2 проходят также четыре плоскости симметрии, но две из них уже были учтены. Значит, получим всего $4 + 3 + 2 = 9$ плоскостей симметрии.

Правильный икосаэдр имеет 12 вершин.

Через первую пару противоположных вершин проходят пять плоскостей симметрии (каждая их них проходит через ребро, содержащее вершину, перпендикулярно противоположному углу).

Далее, через вторую пару противоположных вершин также проходят 5 плоскостей, но одна из них подсчитана в первом случае, так что остаются новых четыре плоскости симметрии.

Для третьей пары получим — 3 новых плоскости, а для четвертой — две плоскости и для пятой пары только одна новая плоскость.

Через шестую пару вершин не пройдет ни одной новой плоскости симметрии.

Значит, всего $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ плоскостей симметрии. Правильный додекаэдр состоит из двенадцати правильных пятиугольников. Так что плоскости симметрии проходят через ребро, содержащее вершину, перпендикулярно противоположному ребру Поэтому через первую пару противоположных пятиугольников проходит 5 плоскостей, через вторую пару — 4, через третью — 3, четвертую — 2, пятую — 1. Так что всего плоскостей симметрии $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.

85 (н) Убедитесь в справедливости теоремы Эйлера для n-угольной призмы (пирамиды, усеченной пирамиды)

n-угольная призма: $B = 2n$; $\Gamma = n+2$; $P = 3n$

$B + \Gamma - P = 2n + n + 2 - 3n = 2$ — теорема Эйлера верна.

n-угольная пирамида: $B = n + 1$; $\Gamma = n + 1$; $P = 2n$

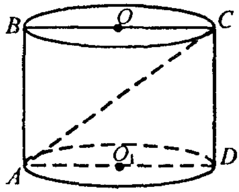
$B + \Gamma - P = n + 1 + n + 1 - 2n = 2$ - теорема Эйлера верна.

n-угольная усеченная пирамида: $B = 2n$; $\Gamma = n + 2$; $P = 3n$

$B + \Gamma - P = 2n + n + 2 - 3n$ — теорема Эйлера верна.

§6 (§21). Тела вращения.

1. Радиус основания цилиндра 2 м, а высота 3 м. Найдите диагональ осевого сечения.



Осевое сечение является прямоугольником со сторонами

$CD = 2$ м и $AD = 4$ м. Так что из прямоугольного ΔACD:

$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (м) (по теореме Пифагора).

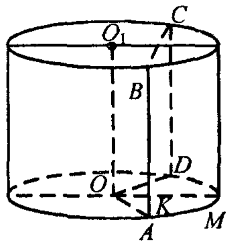
Ответ: 5 м.

2. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого Q. Найдите площадь основания цилиндра.

Задача решена в учебнике п. 53 (187), стр. 91.

3. Высота цилиндра 6 см, радиус основания 5 см.

Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее.



В равнобедренном ΔAOD $OK \perp AD$; так что $OK=4$ (см). Далее, по теореме Пифагора в ΔAOK

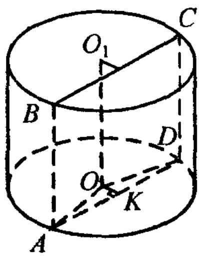
$AK = \sqrt{OA^2 - OK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$(см), а $AD = 2AK = 6$(см).

Тогда $S_{ABCD} = AD \cdot AB = 6 \cdot 6 = 36$(см^2).

Ответ: 36 см^2.

4. Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм.

Цилиндр пересечен плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси.



Так как в сечении квадрат ABCD, то $AB=AD=8$ дм.

В равнобедренном ΔAOD проведем $OK \perp AD$.

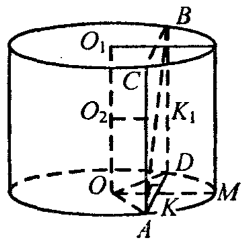
Тогда $AK = \frac{1}{2} \cdot AD = 4$(дм). Далее, по теореме Пифагора

$OK = \sqrt{AO^2 - AK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (дм).

Ответ: 3 дм.

5. Высота цилиндра 6 дм, радиус основания 5 дм. Концы отрезка AB, равного 10 дм, лежат на окружностях обоих оснований.

Найдите кратчайшее расстояние от него до оси.

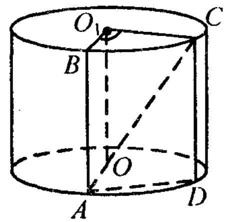


Проведем через AB плоскость $ABCD$, параллельную OO_1. Так как $ABCD$ прямоугольник, то $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (дм). В равнобедренном ΔAOD проведем $OK \perp AD$, тогда $AK = 0{,}5 \cdot AD = 4$ (дм). Из ΔAOK

$OK = \sqrt{AO^2 - AK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (дм).

6. В равностороннем цилиндре (диаметр равен высоте цилиндра) точка окружности верхнего основания соединена с точкой окружности нижнего основания.

Угол между радиусами, проведенными в эти точки, равен 60°. Найдите угол X между проведенной прямой и осью цилиндра.



Через данные точки A и C проведем плоскость $ABCD$, параллельную оси. Соединим точки B и O_1. Угол между радиусами, проведенными в данные точки A и C соответственно из O и O_1 будет равен углу $\angle BO_1C = 60°$.

Следовательно, равнобедренный ΔBO_1C является равносторонним и $BC = 0{,}5 = K$. Искомый угол X между проведенной прямой AC и осью цилиндра равен $\angle BAC$. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = D = 2R$ (по условию). Тогда из прямоугольного ΔABC

$$\operatorname{tg} X = \operatorname{tg}\angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad X = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

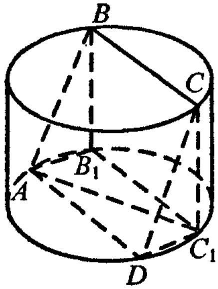
Ответ: $X = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

7. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен высоте цилиндра.

Задача решена в учебнике п. 54 (188), стр. 92.

8. Высота цилиндра 2 м. Радиус основания 7 м. В этот цилиндр наклонно вписан квадрат — так, что все вершины его лежат на окружностях оснований. Найдите сторону квадрата.

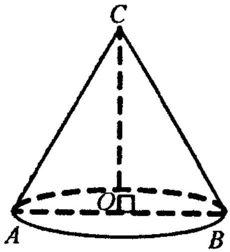
Пусть $ABCD$ — данный квадрат, тогда проведем BB_1 и CC_1 перпендикулярно плоскости основания. По теореме о трех перпендикулярах $B_1A \perp AD$ и $C_1D \perp AD$. Так что AB_1C_1D — прямоугольник и $AD = B_1C_1$, а его диагональ AC_1 является диаметром окружности, так что $AC_1 = 14$ (м).



Из ΔADC_1 и ΔCDC_1 получим по теореме Пифагора $DC_1^2 = AC_1^2 - AD^2$ и
$DC_1^2 = DC^2 - CC_1^2$.
Далее, пусть $AD = DC = a$, тогда:
$AC_1^2 - a^2 = a^2 - CC_1^2$, $14^2 - a^2 = a^2 - 2^2$,
$a^2 = 100$ и $a = 10$(м).

Ответ: 10 (м).

9. Радиус основания конуса 3 м, высота 4 м. Найдите образующую l.

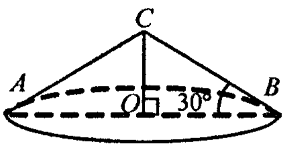


Из прямоугольного ΔBOC по теореме Пифагора получим:

$l = BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$(м).

Ответ 5 м.

10. Образующая конуса l наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите высоту.



Из прямоугольного ΔBOC:

$CO = BC \cdot \sin 30° = \dfrac{l}{2}$

11. Радиус основания конуса R. Осевым сечением конуса является прямоугольный треугольник.

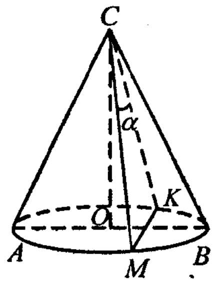
Найдите его площадь.

Данный прямоугольный треугольник является еще и равнобедренным. Так что высота в нем, проведенная к основанию, является и медианой. А медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, то есть радиусу, так как гипотенуза равна диаметру. Тогда площадь $S = \frac{1}{2} \cdot d \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R = R^2$.

Ответ: R^2.

12. В равностороннем конусе (осевое сечение — правильный треугольник) радиус основания R.

Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен α.



Так как в осевом сечении ΔABC — правильный, то $AC=AB=2R$. Площадь ΔMCK найдем по формуле:

$$S = \frac{1}{2} MC \cdot CK \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 2R \sin\alpha =$$

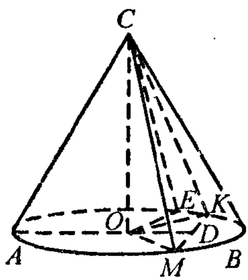
$= 2R^2 \sin\alpha$ (так как $MC = CK = AB$ — образующие).

Ответ: $2R^2\sin\alpha$.

13. Высота конуса 20, радиус его основания 25. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину, если расстояние от него до центра основания конуса равно 12.

Проведем $OD \perp MK$ в равнобедренном ΔOMK. По теореме о трех перпендикулярах $CD \perp MK$. Проведем $OE \perp CD$ в ΔCOD.

Тогда OE данное расстояние от центра основания конуса до плоскости MCK.



$OE = 12$. Так что в ΔCOD:

$\sin\angle OCE = \frac{OE}{OC} = \frac{12}{20} = 0{,}6$. Тогда

$\cos\angle OCE = \sqrt{1-\sin^2\angle OCE} = \sqrt{1-0{,}36} = 0{,}8$.

Так что, $\operatorname{tg}\angle OCE = \frac{\sin\angle OCE}{\cos\angle OCE} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$.

Далее, $OD = CO \cdot \operatorname{tg}\angle OCE = 20 \cdot 0{,}75 = 15$

$CD = \sqrt{OD^2 + CO^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$.

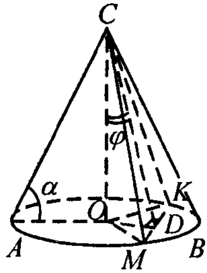
В ΔOMD по теореме Пифагора:

$MD = \sqrt{OM^2 - OD^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$, так что $MK = 2MD = 40$.

$S_{MCK} = \frac{1}{2} MK \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 25 = 500$.

Ответ: 500.

14. Радиус основания конуса R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Через вершину конуса проведена плоскость под углом φ к его высоте. Найдите площадь полученного сечения.



В прямоугольном ΔACO
$CO = AO \cdot \mathrm{tg}\alpha = R \cdot \mathrm{tg}\alpha$.

В ΔOMK проведем $OD \perp MK$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $CD \perp MK$.

В прямоугольном ΔOCD имеем
$OD = OC \cdot \mathrm{tg}\varphi = R\,\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\varphi$ и

$$CD = \frac{OC}{\cos\varphi} = R\frac{tg\,\alpha}{\cos\varphi}.$$

Далее, в прямоугольном ΔODK по теореме Пифагора

$$DK=\sqrt{OK^2-OD^2} = \sqrt{R^2-R^2\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi} = R\sqrt{1-tg^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi}.$$

Так что площадь ΔCMK равна $S_{CMK}=\frac{1}{2}\cdot MK\cdot CD =$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2R\mathrm{tg}\alpha}{\cos\varphi}\cdot R\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi} = \frac{R^2\mathrm{tg}\alpha}{\cos\varphi}\cdot\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi}.$$

Ответ: $\dfrac{R^2\mathrm{tg}\alpha}{\cos\varphi}\cdot\sqrt{1-\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi}$

15. Задача решена в учебнике п. 56 (190), стр. 95.

16. Высота конуса H.

На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания ?

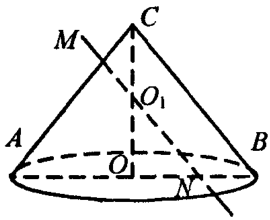
Проведенная плоскость отсечет от конуса подобный конус. В подобных фигурах отношение линейных размеров равно коэффициенту подобия, а отношение соответствующих площадей — квадрату коэффициента подобия. Так что

$\dfrac{S_1}{S_2} = K^2 = \dfrac{1}{2}$. Поэтому $K = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда $\dfrac{l}{H} = K$ и

$l = H{\cdot}K = \dfrac{H}{\sqrt{2}}$, где l — искомое расстояние.

Ответ: $\dfrac{H}{\sqrt{2}}$.

17. Через середину высоты конуса проведена прямая, параллельная образующей l. Найдите длину отрезка прямой, заключенной внутри конуса.



Пусть MN — данная прямая.

Рассмотрим осевое сечение конуса, содержащее прямую MN. В ΔCOB по условию $CO_1 = O_1O$ и $O_1N \parallel CB$. Тогда по теореме Фалеса $ON = NB$, а значит,

$ON = \frac{1}{2}R$. Так что $NA = \frac{3}{2}R$.

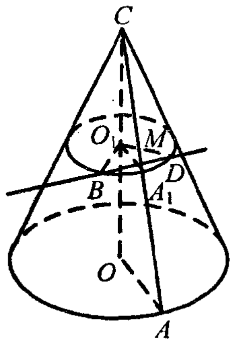
Далее, $\Delta AMN \sim \Delta ACB$, поэтому $\frac{AN}{AB} = \frac{MN}{CB}$. Так что

$$MN = \frac{AN \cdot CB}{AB} = \frac{\frac{3}{2}R \cdot l}{2R} = \frac{3}{4}l.$$

Ответ: $\frac{3}{4}l$.

18. Образующая конуса 13 см, высота 12 см. Конус пересечен прямой, параллельной основанию, расстояние от нее до основания равно 6 см, а до высоты — 2 см.

Найдите отрезок прямой, заключенный внутри конуса.



Из ΔCOA по теореме Пифагора:

$OA = \sqrt{CA^2 - CO^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (см).

Проведем плоскость, параллельную основанию и содержащую данную прямую BD.

Тогда проведенная плоскость отсечет от конуса подобный конус. Далее, $\Delta CO_1A_1 \sim \Delta COA$.

Тогда $\frac{O_1A_1}{OA} = \frac{CO_1}{CO}$, то есть

$O_1A_1 = \frac{OA \cdot CO_1}{CO} = \frac{5 \cdot (12-6)}{12} = 2{,}5$(см).

Далее, в ΔBO_1D проведем $O_1M \perp BD$.

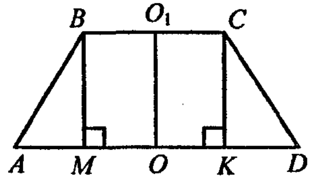
Тогда в прямоугольном ΔBO_1M

$BM = \sqrt{BO_1^2 - O_1M^2} = \sqrt{2{,}5^2 - 2^2} = 1{,}5$ (см) (по теореме Пифагора). Так что $BD = 2 \cdot BM = 2 \cdot 1{,}5 = 3$ (см).

Ответ: 3 см.

19. Радиусы оснований усеченного конуса 3 м и 6 м, высота 4 м. Найдите образующую.

Рассмотрим осевое сечение усеченного конуса. Тогда $ABCD$ — равнобокая трапеция с основаниями



$BC = 2R_1 = 2 \cdot 3 = 6$ (м) и

$AD = 2R_2 = 2 \cdot 6 = 12$ (м).

Далее, проведем $BM \perp AD$ и $CK \perp AD$. $BCKM$ — прямоугольник. Имеем $BM = CK$ и $\Delta ABM = \Delta DCK$.

Поэтому $KD = AM = \dfrac{AD - MK}{2} = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{12 - 6}{2} = 3$ (м). Далее,

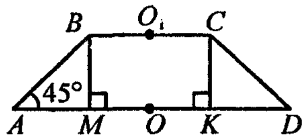
в прямоугольном ΔABM по теореме Пифагора:

$AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (м).

Ответ: 5 м.

20. Радиусы оснований усеченного конуса R и r, образующая наклонена к основанию под углом 45°.

Найдите высоту H.



Рассмотрим осевое сечение усеченного конуса. Им является $ABCD$ — равнобокая трапеция с основаниями

$BC = 2 \cdot BO_1 = 2r$ и $AD = 2 \cdot AO = 2R$.. Далее, проведем $BM \perp AD$ и $CK \perp AD$. Тогда $BCKM$ — прямоугольник и $BC = MK$, $BM = CK$. $\Delta ABM = \Delta DCK$.

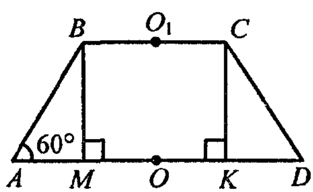
Так что $KD = AM = \dfrac{AD - MK}{2} = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{2R - 2r}{2} = R - r$.

Далее, ΔAMB равнобедренный, так как $\angle A = \angle ABM = 45°$.

Так что $H = BM = AM = R - r$.

Ответ: $R - r$.

21. Образующая усеченного конуса равна $2a$ и наклонена к основанию под углом 60°. Радиус одного основания вдвое больше радиуса другого основания. Найдите радиусы.



Рассмотрим осевое сечение усеченного конуса. Им является равнобедренная трапеция $ABCD$, где $BC = 2R_2$ и $AD = 2R_1 = 2 \cdot 2R_2 = 4R_2 = BC$. Далее, проведем $BM \perp AD$ и $CK \perp AD$. Тогда $BCKM$ — прямоугольник, так что $BC = MK$ и $BM = CK$. Поэтому $\Delta ABM = \Delta DCK$ ($AB = CD$ и $BM = CK$). Так что

$AM = KD = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{4R_2 - 2R_2}{2} = R_2.$

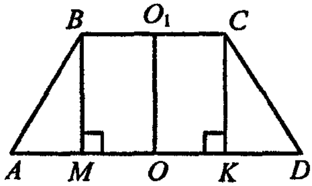
Далее, в прямоугольном ΔABM:

$AM = R = AB \cdot cos60° = 2a \cdot \dfrac{1}{2}$. Тогда $R_1 = 2R_2 = 2a$.

Ответ: a и 2 a.

22. Радиусы оснований усеченного конуса 3 дм и 7 дм, образующая 5 дм.

Найдите площадь осевого сечения.



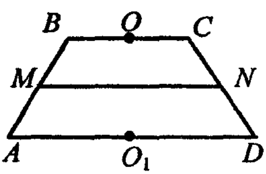
Рассмотрим осевое сечение усеченного конуса. Им является равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 2R_1 = 6$ дм и $AD = 2R_2 = 14$дм. Далее, проведем $BM \perp AD$ и $CK \perp AD$. Так что $BC = MK$ и $BM = CK$. Тогда $BCKM$ — прямоугольник. $\Delta ABM = \Delta CKD$, так что

$KD = AM = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{14 - 6}{2} = 4$ (дм). В прямоугольном ΔABM по теореме Пифагора получим: $BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (дм).

Тогда $S = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BM = \dfrac{6 + 14}{2} \cdot 3 = 30$ (дм^2).

Ответ: 30 дм^2.

23. Площади оснований усеченного конуса 4 дм^2 и 16 дм^2, через середину высоты проведена плоскость, параллельная основаниям. Найдите площадь сечения.



Рассмотрим осевое сечение усеченного конуса. Им является $ABCD$ — трапеция с основаниями $BC = 2R_1$ и $AD = 2R_2$.

Далее, $S_1 = \pi R_1^2 = 4$(дм^2). Так что

$R_1 = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$ (дм) и $BC = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}$ (дм).

$S_2 = \pi R_2^2 = 16$ (дм^2). Так что $R_2 = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}$ (дм) и $AD = \dfrac{8}{\sqrt{\pi}}$ (дм)

MN является средней линией трапеции, так что:

$MN = \dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{6}{\sqrt{\pi}}$. Но MN – диаметр данного сечения.

Тогда радиус этого сечения $R = \frac{1}{2} MN = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ и площадь

$S = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{9}{\pi} = 9$ (дм^2).

Ответ: 9 дм^2.

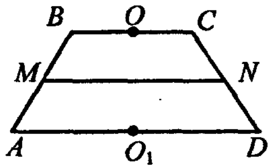
24. Площадь оснований усеченного конуса M и m.

Найдите площадь среднего сечения, параллельного основаниям.

Осевое сечение усеченного конуса представляет собой трапецию $ABCD$ с основаниями $BC=2R_1$ и $AD=2R_2$.

Так как площади оснований равны $M = \pi R_2^2$ и $m = \pi R_2^2$, так что

$R_1 = \sqrt{\frac{M}{\pi}}$ и $R_2 = \sqrt{\frac{m}{\pi}}$.



Тогда, поскольку MN — средняя линия, то $MN = \frac{BC + AD}{2} = \frac{\sqrt{M} + \sqrt{m}}{\sqrt{\pi}}$.

Тогда радиус сечения равен $R = \frac{1}{2} MN = \frac{\sqrt{M} + \sqrt{m}}{2\sqrt{\pi}}$.

А площадь $S = \pi R^2 = \pi \frac{\left(\sqrt{M} + \sqrt{m}\right)^2}{4\pi} = \frac{\left(\sqrt{M} + \sqrt{m}\right)^2}{4}$.

25. У пирамиды все боковые ребра равны.

Докажите, что она является вписанной в некоторый конус.

Задача решена в учебнике п. 57 (191), стр. 95.

26. В конусе даны радиус основания R и высота H.

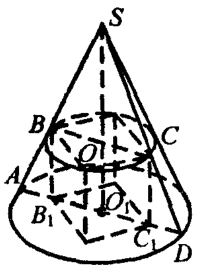
Найдите ребро вписанного в него куба.

Рассмотрим осевое сечение куба ASD. Тогда в ΔASD вписан BCC_1B_1— прямоугольник со сторонами $BB_1 = a$ — длина ребра куба и $BC=a\sqrt{2}$ — диагональ квадрата, являющегося гранью куба. Далее, $\Delta ASD \sim \Delta BSC$ так что:

$\frac{BC}{AD} = \frac{SO}{SO_1}$, $\frac{a\sqrt{2}}{2R} = \frac{H-a}{H}$, откуда

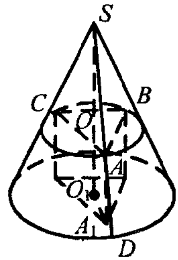
$Ha\sqrt{2} = 2RH - 2aR$. Так что

$a(2R + H\sqrt{2}) = 2RH$, и $a = \frac{2RH}{2R + H\sqrt{2}}$.



Ответ: $a = \frac{2RH}{2R + H\sqrt{2}}$.

27. В конусе даны радиус основания R и высота H. В него вписана правильная треугольная призма, у которой боковые грани — квадраты. Найдите ребро призмы.



Пусть длина ребра призмы равна a.

Тогда из равностороннего ΔABC найдем OA — радиус окружности, описанной около ΔABC, $OA=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Далее, рассмотрим осевое сечение SO_1D. Так как $\Delta SOA \sim \Delta SOD$, то

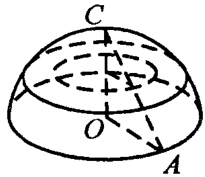
$\frac{OA}{O_1D}=\frac{SO}{SO_1}$, $\frac{a\sqrt{3}}{3R}=\frac{H-a}{H}$, так что

$aH\sqrt{3}=3RH-3Ra$, $a(3R+H\sqrt{3})=3RH$, и $a=\frac{3RH}{3R+H\sqrt{3}}$.

Ответ: $a=\frac{3RH}{3R+H\sqrt{3}}$.

28. Полушар и вписанный в него конус имеют общее основание и общую высоту . Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основанию. Докажите, что площадь сечения, заключенного между боковой поверхностью конуса и поверхностью полушара, равна половине площади основания.

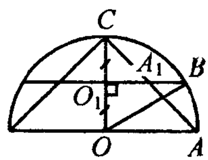
а)



Рассмотрим осевое сечение конуса COA. Тогда $\Delta CO_1A_1 \sim \Delta COA$,

так что $\frac{CO_1}{CO}=\frac{O_1A_1}{OA}$, так что $O_1A_1=OA\frac{CO_1}{CO}=OA\frac{\frac{1}{2}CO}{CO}=\frac{1}{2}AO$.

б)



В прямоугольном ΔOO_1B по теореме Пифагора:

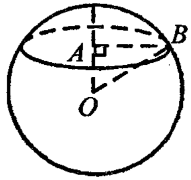
$$O_1B=\sqrt{OB^2-OO_1^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{1}{2}R\right)^2}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Искомая площадь сечения равна разности площадей кругов с радиусом O_1B и O_1A:

$$S = \pi \cdot O_1B^2 - \pi \cdot O_1A_1{}^2 = \pi \cdot \frac{R^2 \cdot 3}{4} - \pi \cdot \frac{R^2}{4} = \frac{\pi R^2}{2}.$$

А площадь основания $S_O = \pi OA^2 = \pi R^2$, так что площадь сечения равна половине площади основания, что и требовалось доказать.

29. Шар, радиус которого 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9дм от центра. Найдите площадь сечения.



В прямоугольном ΔAOB по теореме Пифагора: $AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ (дм).

Тогда площадь сечения

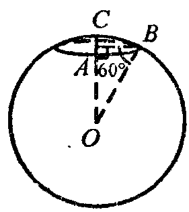
$S = \pi \cdot AB^2 = \pi \cdot 40^2 = 1600\pi$ (дм^2) $= 16\pi$ (м^2).

Ответ: 16π м^2.

30. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

Задача решена в учебнике п. 59 (193), стр. 97.

31. Радиус шара R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60° к нему. Найдите площадь сечения.



В прямоугольном ΔAOB имеем:

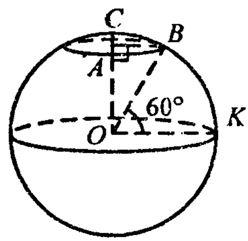
$$AB = OB\cos 60° = OB \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}.$$

Тогда площадь сечения равна:

$$S = \pi \cdot AB^2 = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi R^2}{4}$.

32. Радиус земного шара R. Чему равна длина параллели, если ее широта 60°?



В прямоугольном ΔAOB:

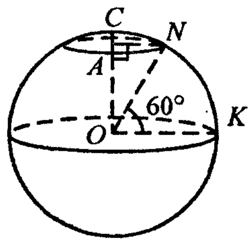
$\angle AOB = 90° - \angle BOK = 30°$.

$AB = OB \cdot \sin\angle AOB = R \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$. Тогда длина параллели равна $l = 2\pi \cdot AB = 2\pi \cdot \frac{R}{2} = \pi R$..

Ответ: πR..

33. Город N находится на 60° северной широты. Какой путь совершает этот пункт в течение 1ч. вследствие вращения Земли вокруг своей оси?

Радиус Земли принять равным 6000 км.



В прямоугольном ΔAON:
$\angle AON = 90° - \angle NOK = 30°$.

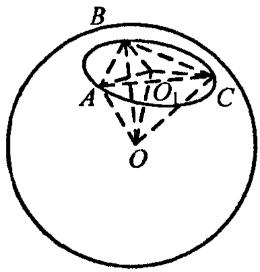
Тогда $AN = ON \cdot \sin 60° = \dfrac{R}{2}$. За один час город N совершит путь по дуге, равной $\dfrac{1}{24}$ длины окружности с радиусом AN.

Так что, $l = \dfrac{1}{24} \cdot 2\pi AN = \dfrac{1}{24} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \dfrac{6000}{2} = 250\pi \approx 785$ (км).

Ответ: ≈785 км.

34. На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними 6 см, 8 см, 10 см. Радиус шара 13 см. Найдите расстояние от центра до плоскости, проходящей через эти точки.

Проведем OO_1 перпендикулярно плоскости ΔABC. Тогда прямоугольные треугольники AO_1O, BO_1O, CO_1O равны по катету и гипотенузе (так как $AO = BO = CO$ — радиус шара и OO_1— общий катет). Так что O_1 — центр окружности, описанной около треугольника ABC ($O_1A = O_1B = O_1C$).



Далее, заметим, что $6^2 + 8^2 = 10^2$, так что ΔABC прямоугольный с гипотенузой AC. Поэтому O_1 — середина AC, так что

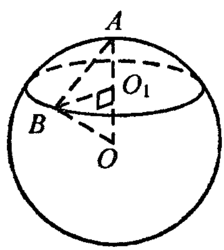
$AO_1 = \dfrac{1}{2} AC = 5$ (см).

Далее, в прямоугольном ΔAOO_1:

$OO_1 = \sqrt{AO^2 - AO_1^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

35. Диаметр шара 25 см. На его поверхности даны точка A и окружность, все точки, которой удалены (по прямой) от A на 15 см. Найдите радиус этой окружности.



Радиус шара равен половине диаметра.

Так что $AO = OB = \dfrac{1}{2} \cdot 25 = 12{,}5$ (см).

Далее, ΔAOB равнобедренный (так как $OB = OA$) и $AB = 15$ см.

Найдем площадь ΔAOB по формуле:

$$S_{AOB} = \sqrt{p\cdot(p-AO)\cdot(p-OB)\cdot(p-AB)} =$$

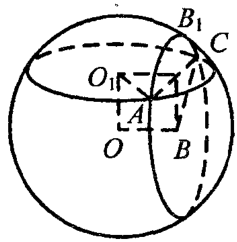
$$= \sqrt{20\cdot(20-12{,}5)\cdot(20-12{,}5)\cdot(20-15)} = 75 \text{ (см)}. \quad \text{Но } S_{AOB} = \frac{1}{2}\cdot AO\cdot BO_1.$$

Так что $R = BO_1 = \dfrac{2S_{AOB}}{AO} = \dfrac{2\cdot 75}{15} = 10$ (см).

Ответ: 10 см.

36. Радиус шара 7 см. На его поверхности даны две равные окружности, имеющие общую хорду длиной 2 см.

Найдите радиусы окружностей, зная, что их плоскости перпендикулярны.



Из центра шара O проведем перпендикуляры OO_1 и OB к плоскостям соответствующих окружностей. Из точек O_1 и B проведем перпендикуляры O_1B_1 и BB_1 к общей хорде AC. Тогда

$$AB_1 = B_1C = \frac{1}{2}AC = 1 \text{(см)}.$$

Далее, в прямоугольном ΔO_1AB_1, если $O_1A = R$ и $C_1B = a$, то получим $O_1A^2 = O_1B_1^2 + AB_1^2$, т.е $R^2 = a^2 + 1$. В прямоугольном ΔBCB_1 обозначим $BC = R$, $BB_1 = b$, тогда $BC^2 = BB_1^2 + B_1C^2$, т.е. $R^2 = b^2 + 1$. Так что $a = b$, то есть $O_1B_1 = BB_1$.

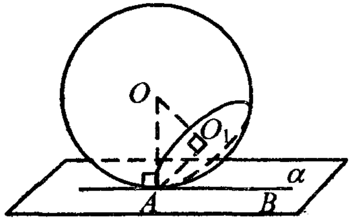
Тогда OO_1BB_1 — квадрат и его диагональ $OB_1^2 = 2O_1B^2 = 2a^2$.

Далее, в прямоугольном ΔOAB_1 $OA = 7$ см, тогда $OA^2 = OB_1^2 + AB_1^2$, то есть $49 = 2a^2 + 1$, $a^2 = 24$.

Далее, $R^2 = a^2 + 1 = 25$, так что $O_1A = R = \sqrt{25} = 5$ (см).

Ответ: 5 см.

37. Дан шар радиуса R. Через одну точку его поверхности проведены две плоскости: первая — касательная к шару, вторая — под углом 30° к первой. Найдите площадь сечения.



Так как $\angle O_1AB = 30°$, а $OA \perp AB$, то $\angle OAO_1 = 90° - \angle O_1AB = 90° - 30° = 60°$.

Далее, в прямоугольном ΔAO_1O:

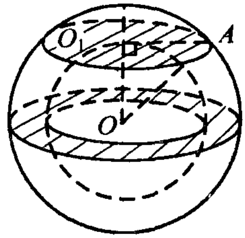
$$AO_1 = AO\cdot\cos\angle O_1AO = R\cdot\cos 60° = R\cdot\frac{1}{2} = \frac{R}{2}.$$

Тогда площадь сечения равна $S=\pi \cdot AO_1^2=\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2=\frac{\pi R^2}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi R^2}{4}$.

38. Имеется тело, ограниченное двумя концентрическими шаровыми поверхностями (полый шар).

Докажите, что его сечение плоскостью, проходящей через центр, равновелико сечению, касательному к внутренней шаровой поверхности.



Допустим, что радиусы двух шаров равны R_1 и R_2. Тогда в прямоугольном ΔOO_1A: $O_1A^2=\sqrt{OA^2-OO_1^2}=\sqrt{R_1^2-R_2^2}$.

Площадь касательного сечения равна $S=\pi O_1A^2=\pi(R_1^2-R_2^2)$.

Площадь сечения шара плоскостью, проходящей через центр, равна разности площадей $S=\pi R_1^2-\pi R_2^2=\pi(R_1^2-R_2^2)$. То есть площади искомых сечений равны.

Что и требовалось доказать.

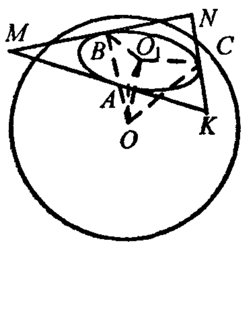
39. Шар радиуса R касается всех сторон правильного треугольника со стороной a.

Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника

Задача решена в учебнике п. 61 (195), стр. 99.

40. Стороны треугольника 13 см, 14 см и 15 см. Найдите расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касающегося всех сторон треугольника. Радиус шара 5 см.

Проведем OO_1 перпендикулярно плоскости ΔMNK. Так как стороны ΔMNK касаются шара, то OA, OB и OC перпендикулярны сторонам ΔMNK. Тогда по теореме о трех перпендикулярах O_1A, O_1B и O_1C тоже перпендикулярны к соответствующим сторонам ΔMNK.



Далее, так как $\Delta AOO_1=\Delta BOO_1=\Delta COO_1$ (по катету и гипотенузе), то: $O_1A=O_1B=O_1C$. Так что O_1 — центр вписанной окружности в ΔMNK. Площадь ΔMNK равна:

$$S=\sqrt{p\cdot(p-MN)\cdot(p-MK)\cdot(p-NK)}=$$
$$=\sqrt{21\cdot7\cdot8\cdot6}=84\ (\text{см}^2).$$

Но $S=pr$, так что $O_1A=r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{84}{21}=4$ (см).

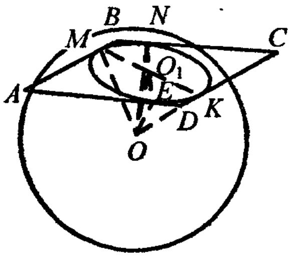
Далее, в прямоугольном ΔAOO_1:

$OO_1=\sqrt{AO^2-AO_1^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$ (см).

Ответ: 3 см.

41. Диагонали ромба 15 см и 20 см. Шаровая поверхность касается всех его сторон. Радиус шара 10 см.

Найдите расстояние от центра шара до плоскости ромба.



а) Проведем перпендикуляр OO_1 к плоскости ромба.

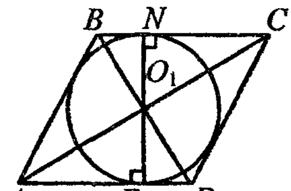
Отрезки $OM=ON=OK=OE=10$ см и перпендикулярны соответствующим сторонам ромба. Так что по теореме о трех перпендикулярах O_1M, O_1N, O_1K и O_1E перпендикулярны соответствующим сторонам ромба.

Далее, $\Delta OO_1M=\Delta OO_1N=\Delta OO_1K=\Delta OO_1E$ (по гипотенузе и катету). Так что $O_1M=O_1N=O_1K=O_1E$ и значит, O_1 — центр вписанной в ромб окружности.

б) В прямоугольном ΔAO_1D ($AC\perp BD$):

$$AD=\sqrt{AO_1^2+DO_1^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}AC\right)^2+\left(\frac{1}{2}BD\right)^2}=$$

$$=\sqrt{7{,}5^2+10^2}=12{,}5\text{ (см)}.$$



Тогда

$S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BD=\dfrac{1}{2}\cdot 15\cdot 20=150$ (см^2).

С другой стороны,

$S_{ABCD}=ah=AD\cdot NE$.

Так что $NE=\dfrac{S_{ABCD}}{AD}=\dfrac{150}{12{,}5}=12$ (см).

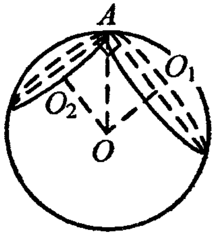
Тогда $O_1E=\dfrac{1}{2}NE=6$ (см).

Далее, в прямоугольном ΔOO_1E:

$OO_1=\sqrt{OE^2-O_1E^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$(см).

Ответ: 8 см.

42. Через касательную к поверхности шара проведены две взаимно перпендикулярные плоскости, пересекающие шар по кругам радиусов r_1 и r_2 Найдите радиус шара R.



Проведем перпендикуляры OO_1 и OO_2 к данным плоскостям. По условию $\angle O_1AO_2 = 90°$, так что OO_1AO_2 — прямоугольник.

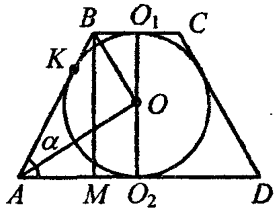
Тогда по теореме Пифагора

$$OA = R = \sqrt{OO_1^2 + OO_2^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}.$$

Ответ: $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

43. Шар радиуса R вписан в усеченный конус. Угол наклона образующей l к плоскости нижнего основания конуса равен α.

Найдите радиусы оснований и образующую усеченного конуса.



Рассмотрим осевое сечение, которое является трапецией $ABCD$, причем $AB = CD$. $\angle BAD = \alpha$.

Проведем $BM \perp AD$.
Тогда $BM = O_1O_2 = 2R$.

В ΔABM: $l = AB = \dfrac{BM}{\sin\alpha} = \dfrac{2R}{\sin\alpha}$.

Центр вписанной в $ABCD$ окружности лежит на пересечении биссектрис, так что AO и BO — биссектрисы, то есть

$$\angle BAO = \frac{1}{2}\alpha,\ \angle ABO = \frac{1}{2}\angle ABC = 90° - \frac{1}{2}\alpha.$$

Так что ΔABO — прямоугольный, поэтому

$$BO = AB \cdot \sin\angle BAO = \frac{2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Далее, в прямоугольном ΔBOO_1: $BO_1 = \sqrt{BO^2 - OO_1^2} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2 - R^2} = R\cdot\sqrt{\frac{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = R\sqrt{\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = R\sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны, то $BK = BO_1$ и $AO_2 = AK$.

Тогда $AO_2 = AK = AB - BK = AB - BO_1 = \dfrac{2R}{\sin\alpha} - Rtg\dfrac{\alpha}{2} =$

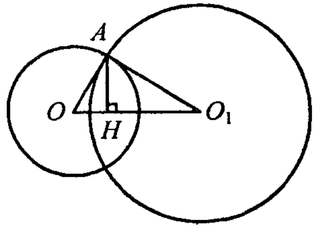
$$= \frac{2R}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{R\cdot\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{R\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = R\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $R\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ и $R\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

44. Два равных шара радиуса R расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найдите длину линии l, по которой пересекаются их поверхности.

Задача решена в учебнике п. 62 (196), стр. 100.

45. Радиусы шаров 25 дм и 29 дм, а расстояние между их центрами 36 дм. Найдите длину линии l, по которой пересекаются их поверхности.



Рассмотрим сечение, проведенное через центры шаров. Тогда линия пересечения шаров представляет собой окружность радиуса AH, где AH — высота в ΔOAO_1, проведенная к стороне OO_1.

Площадь ΔOAO_1 равна

$S = \sqrt{p\cdot(p-OA)\cdot(p-O_1A)\cdot(p-OO_1)} =$

$= \sqrt{45(45-25)(45-29)(45-36)} = 360$ (дм^2).

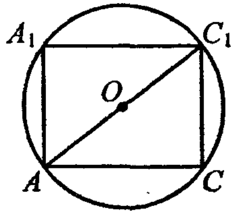
Но с другой стороны $S = \dfrac{1}{2}\,OO_1\cdot AH$, так что

$AH = \dfrac{2S}{OO_1} = \dfrac{2\cdot 360}{36} = 20$ (дм).

Далее, длина линии $l = 2\pi AH = 2\pi\cdot 20 = 40\pi$ (дм) $= 4\pi$ (м).

Ответ: 4π м.

46. Найдите радиус шара, описанного около куба с ребром a.



Рассмотрим осевое сечение шара, проходящего через диагональ куба.

Так как в прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его измерений, то

$AC_1^2=a^2+a^2+a^2$ и $AC_1=a\sqrt{3}$;

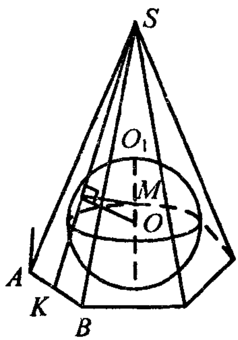
тогда $R=AO=\frac{1}{2}AC_1=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

47. Докажите, что центр шара, описанного около правильной пирамиды, лежит на ее оси.

Задача решена в учебнике п. 63 (197), стр. 100.

48. Докажите, что центр шара, вписанного в правильную пирамиду, лежит на ее высоте.

Пусть X точка касания шара и боковой грани ASB. Из точки X проведем прямую $XM \perp O_1O_2$, где O_1O_2 — диаметр шара, перпендикулярный плоскости основания.



Тогда по теореме Пифагора в ΔOXM:

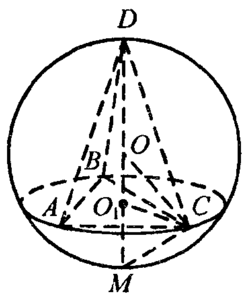
$XM=\sqrt{OX^2-OM^2}=\sqrt{R^2-OM^2}$, где R — радиус шара.

Так что точки касания шара с боковыми гранями лежат в плоскости, перпендикулярной диаметру O_1O_2 и на равном расстоянии от точки M.

Значит, все точки касания принадлежат вписанной в сечение, перпендикулярное O_1O_2, окружности с центром в точке M.

Тогда, точка M лежит на оси правильной пирамиды, которая является высотой. Так что и точка O лежит на высоте правильной пирамиды. Что и требовалось доказать.

49. Найдите радиус шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром a.



Пусть высота тетраэдра DO_1 пересекает поверхность шара в некоторой точке M. Высота в правильной пирамиде проходит через центр окружности, описанной около основания. Так что O_1C — радиус описанной около ABC окружности.

ΔABC равносторонний, так что

$O_1C=\frac{AB\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

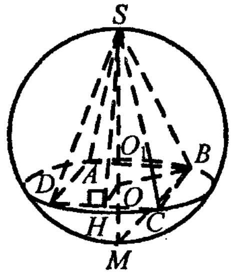
Рассмотрим осевое сечение шара, содержащее точку C. ΔDCM — прямоугольный, так как вписанный угол $\angle DCM$ опирается на диаметр DM. Тогда катет DC — есть среднее геометрическое между своей проекцией и гипотенузой. То есть DC = $\sqrt{DM \cdot O_1D}$.

В ΔO_1DC : $DO_1 = \sqrt{DC^2 - O_1C^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Тогда $DM = \frac{DC^2}{DO_1} = \frac{a^2\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

А радиус шара $R = \frac{1}{2}DM = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

50. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна *a*, а плоский угол при вершине равен α. Найдите радиусы вписанного и описанного шаров.



а) Проведем в пирамиде высоту *SO* и *SH*⊥*DC*. Тогда по теореме о трех перпендикулярах *OH*⊥*DC*. Тогда, так как Δ*SDC* равнобедренный, то *SH* является и медианой, и биссектрисой. Так что $HC = \frac{a}{2}$ и $\angle CSH = \frac{a}{2}$.

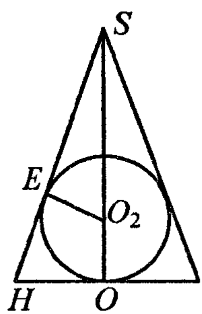
В ΔSHC: $SC = \frac{HC}{\sin\angle CSH} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ и

$$SH = \frac{HC}{\mathrm{tg}\angle CSH} = \frac{a}{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

б) Далее в ΔSHO: $OH = \frac{a}{2}$. Так что

$$SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4tg^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{4}} =$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{a}{2}}{\sin^2\frac{a}{2}} - 1} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{a}{2}}.$$



Далее, $\angle SBM = 90°$, так как этот вписанный угол опирается на диаметр *SM*. Знаем, что катет является средним пропорциональным между гипотенузой и проекцией катета на гипотенузу, так что

$BS^2 = SM \cdot SO$, так что

$$SM = \frac{BS^2}{SO} = \frac{SC^2}{SO} = \frac{a^2 \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdot a\sqrt{\cos\alpha}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}.$$

$$\frac{a^2}{4\sin^2\frac{a}{2}} = 2R \cdot \frac{a\sqrt{\cos a}}{2\sin\frac{a}{2}} \text{ или } R = \frac{a}{4\sin\frac{a}{2}\sqrt{\cos a}}.$$

Так как радиус описанного шара $R = \frac{1}{2} SM$, то $R = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}$.

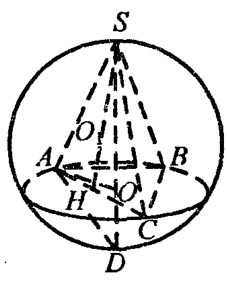
Далее, рассмотрим сечение пирамиды плоскостью SOH. $OO_2 = EO_2$ — радиус вписанного шара.
Имеем $\Delta SHO \sim \Delta SO_2E$:

Так что $\dfrac{O_2E}{OH} = \dfrac{SO_2}{SH}$ или $\dfrac{OO_2}{OH} = \dfrac{SO - OO_2}{SH}$. Так что

$$OO_2 = \frac{OH \cdot SO}{OH + SH} = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}}{\frac{a}{2} + \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2a^2\sqrt{\cos\alpha} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{4a\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{a\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(1 + tg\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a\sqrt{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}}{2\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1 - tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg\frac{\alpha}{2}}}.$$



51. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида с плоскими углами α при ее вершине.

Найдите высоту пирамиды.

Проведем высоту SO пирамиды, и $SH \perp AC$. Так как ΔASC равнобедренный, то SH является и медианой, и биссектрисой. Так что, если

$AS = X$, то $AH = AS\sin\frac{\alpha}{2} = X\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$ и $AC = 2AH = 2\cdot X\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$.

В равностороннем ΔABC радиус описанной окружности равен

$$AO = \frac{AC\sqrt{3}}{3} = \frac{2\cdot X\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{3}}{3}.$$

В прямоугольном ΔASO по теореме Пифагора:

$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{X^2 - \frac{4}{3}X^2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = X\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Рассмотрим осевое сечение шара, содержащее точку A. $\angle SAD = 90°$ — как вписанный угол, опирающийся на диаметр SD. Так как в прямоугольном треугольнике катет является средним пропорциональным между гипотенузой и проекцией катета на гипотенузу, то в ΔASD:

$AS^2 = SD\cdot SO$, $X^2 = 2R\cdot X\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, так что

$$X = 2R\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому высота пирамиды равна:

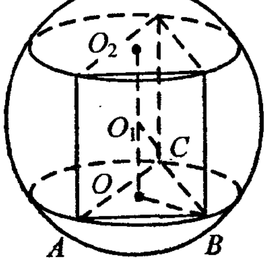
$$SO = X\cdot\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 2R\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= 2R\left(1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

52. Правильная n-угольная призма вписана в шар радиуса R. Ребро основания призмы равно a. Найдите высоту призмы при: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 6$.

Так как вписанная призма правильная, то высота будет равна длине отрезка O_2O, где точки O_2 и O являются центрами окружностей, описанных около оснований призмы. Тогда

$$OO_2 = 2OO_1 = 2\sqrt{O_1B^2 - OB^2} = 2\sqrt{R^2 - b^2}$$ где $b = OB$ — радиус окружности, описанной около основания призмы. Тогда:



1) $n = 3$. В основании призмы лежит равносторонний треугольник.

Так что $b = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, поэтому

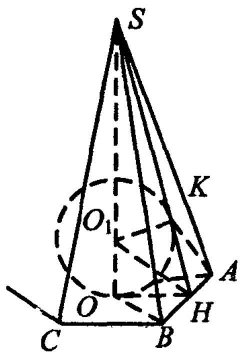
$$OO_2 = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 2\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{3}}.$$

2) $n = 4$. В основании призмы лежит квадрат. Так что

$$b = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ и } OO_2 = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{2}}.$$

3) $n = 6$. В основании призмы лежит правильный шестиугольник. Так что $b = a$, поэтому $OO_2 = 2\sqrt{R^2 - a^2}$.

53. Сторона основания правильной n-угольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен φ. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.



В правильной пирамиде проведем высоту SO. Тогда O — центр окружности, описанной около основания. Так что ΔAOB — равнобедренный и $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$. Далее, проведем $OH \perp BA$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $SH \perp AB$. Тогда $\angle SHO = \varphi$ (линейный угол данного двугранного угла).

В прямоугольном ΔOHB:

$$OH = \frac{BH}{tg\angle HOB} = \frac{a}{2tg\frac{180^\circ}{n}},$$ (так как OH — высота, медиана и биссектриса).

Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис, так что O_1H— биссектриса угла φ, так что $\angle OHO_1 = \frac{\varphi}{2}$

В прямоугольном ΔOO_1H:

$$OO_1 = \text{OH} \cdot \text{tg}\angle OHO_1 = \frac{atg\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{180^\circ}{n}}$$ — искомый радиус.

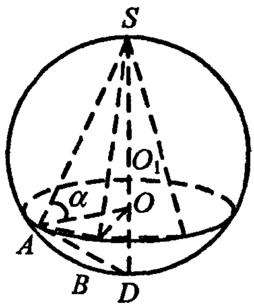
54. Найдите радиус шара, описанного около правильной n-угольной пирамиды, если сторона основания равна a, а боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α.

Проведем высоту SO правильной пирамиды.

Тогда O — центр окружности, описанной около основания.

Далее, в прямоугольном ΔASO: $SA=\dfrac{AO}{\cos\angle SAO}=\dfrac{AO}{\cos\alpha}$,

$AO=\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$ (радиус описанной окружности в правильном n-угольнике.



Тогда $SA=\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}\cos\alpha}$. Далее,

$SO=AO\cdot tg\alpha=\dfrac{a tg\alpha}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$

Рассмотрим осевое сечение шара, содержащее точку A. $\angle SAD=90^\circ$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр SD.

Так как катет является средним пропорциональным между гипотенузой и проекцией катета на гипотенузу, то $AS^2=SD\cdot SO$ (в ΔASD).

Так что $SD=\dfrac{AS^2}{SO}=\dfrac{a^2\cdot\sin\dfrac{180^\circ}{n}}{8\sin^2\dfrac{180^\circ}{n}\cos^2\alpha\cdot a tg\alpha}=$

$=\dfrac{a}{8\sin\dfrac{180^\circ}{n}\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{a}{4\sin\dfrac{180^\circ}{n}\sin 2\alpha}$.

Тогда $SO_1=\dfrac{1}{2}SD=\dfrac{a}{2\sin 2\alpha\cdot\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$ — искомый радиус.

1. Три латунных куба с ребрами 3 см, 4 см и 5 см переплавлены в один куб. Какое ребро у этого куба?

Объем нового куба будет равен сумме объемов трех данных кубов. То есть $V=V_1+V_2+V_3$. Но объем куба равен $V=a^3$. Так что

$a=\sqrt[3]{a_1^3+a_2^3+a_3^3}=\sqrt[3]{3^3+4^3+5^3}=6$ (см).

Ответ: 6 см.

2. Металлический куб имеет внешнее ребро 10,2 см и массу 514,15 г. Толщина стенок равна 0,1 см. Найдите плотность металла, из которого сделан куб.

Ребро внутреннего куба равно $b=a-2\cdot 0{,}1=10$ (см).

Объем металла равен разности объемов кубов:

$V=a^3-b^3=10{,}2^3-10^3=61{,}208$. Тогда плотность

$\rho=\dfrac{m}{V}=\dfrac{514{,}15}{61{,}208}\approx 8{,}4$ г/см^3.

3. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличивается на 98 см^3. Чему равно ребро куба?

Задача решена в учебнике п. 66 (200), стр. 110.

4. Если каждое ребро куба увеличить на 1 м, то его объем увеличится в 125 раз. Найдите ребро.

Пусть ребро куба равно a, тогда его объем $V=a^3$. Далее, ребро нового куба равно $a+1$, его объем $V'=(a+1)^3$. По условию: $\dfrac{V_1'}{V}=125$, $\dfrac{(a+1)^3}{a^3}=125$, $\dfrac{a+1}{a}=5$. Так что $a=0{,}25$(м).

5. Кирпич размером 25x12x6,5 имеет массу 3,51 кг. Найдите его плотность.

Найдем объем кирпича: $V=25\cdot 12\cdot 6{,}5=1950$ (см^3).

Далее, 3,51 кг = 3510 г. Так что плотность

$\rho=\dfrac{m}{V}=\dfrac{3510}{1950}=1{,}8$ (г/см^3).

6. Требуется установить резервуар для воды емкостью 10 м^3 на площадке размером 2,5м x 1,75 м, служащей для него дном. Найдите высоту резервуара.

Площадь дна $S=2{,}5\cdot 1{,}75=4{,}375$ (м^2). Так как

$V = S \cdot h$, то $h = \dfrac{V}{S} = \dfrac{10}{4{,}375} \approx 2{,}29$ (м).

7. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15 м, 50 м и 36 м. Найдите ребро равновеликого ему куба.

Объем параллелепипеда равен $V = 15 \cdot 50 \cdot 36 = 27000$ (м^3).

Пусть ребро куба a, тогда $V = a^3$. То есть

$a = \sqrt{27000} = 30$ (м).

8. Измерения прямоугольного бруска 3см, 4 см и 5 см. Если увеличить каждое ребро на X сантиметров, то поверхность увеличится на 54 см^2. Как увеличится объем?

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда $S = 2 \cdot (ab + bc + ac)$, где a, b, c — его измерения. Площадь поверхности данного бруска равна $S = 2\,(3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5) = 94$ (см^2).

Тогда площадь поверхности нового бруска

$S' = 2 \cdot ((X + 3)(X + 4) + (X + 3)(X + 5) + + (X + 4)(X + 5)) =$

$= 6X^2 + 48X + 94 = S + 54 = 148$ (см^2). Так что

$6X^2 + 48X + 94 = 148$

$X^2 + 8X - 9 = 0, X = -9$ или $X = 1$.

Корень $X = -9$ не подходит, так как иначе размеры нового бруска отрицательны. Значит, $X = 1$.

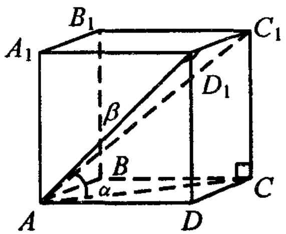
Так что $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \dfrac{6}{3} = 2$. Объем увеличится в 2 раза.

9. Чугунная труба имеет квадратное сечение, ее внешняя ширина 25 см, толщина стенок 3 см. Какова масса погонного метра трубы (плотность чугуна 73 г/см^3)?

Найдем внутреннюю ширину трубы $y = x - 2 \cdot 3 = 25 - 6 = 19$ (см). Тогда площадь сечения равна $S = x^2 - y^2 = 25^2 - 19^2 = 264$ (см^2) и объем метра трубы $V = S \cdot 100 = 26400$ (см^3).

Далее, $m = \rho \cdot V = 7{,}3 \cdot 26400 = 192720$(гр) $= 192{,}72$(кг) ≈ 193(кг).

10. Чему равен объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого a составляет с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью — угол β?



В ΔACC_1:

$C_1C = AC_1 \cdot \sin\alpha = a\sin\alpha$.

$AC = AC_1 \cdot \cos\alpha = a\cos\alpha$. Далее,

в ΔC_1D_1A

$D_1C_1 = AC_1 \cdot \sin\beta = a \cdot \sin\beta$.

$DC = D_1C_1 = a\sin\beta$.

Тогда в ΔADC по теореме Пифагора:

$$AD = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{a^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\beta} = a\cdot\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}.$$

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений, так что

$$V = AD\cdot DC\cdot CC_1 = a^3\sin\alpha\cdot\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}.$$

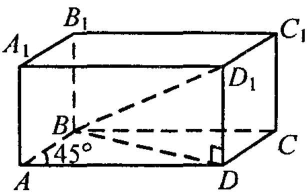
11. В прямом параллелепипеде стороны основания a и b образуют угол 30°. Боковая поверхность равна S.

Найдите его объем.

Задача решена в учебнике п. 67 (201), стр. 111.

12. В прямом параллелепипеде стороны основания $2\sqrt{2}$ см и 5см образуют угол 45°. Меньшая диагональ равна 7см.

Найдите его объем.



В основании параллелепипеда лежит параллелограмм с площадью

$S = AB\cdot AD\cdot\sin 45° =$

$= 2\sqrt{2}\cdot 5\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 10$ (см^2).

Далее, в ΔABD по теореме косинусов:

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos 45°} =$$

$$= \sqrt{8+25-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{13}\text{ (см)}.$$

Тогда в ΔBDD_1 по теореме Пифагора:

$DD_1 = \sqrt{BD_1^2 - BD^2} = \sqrt{7^2-13} = 6$ (см). Поэтому

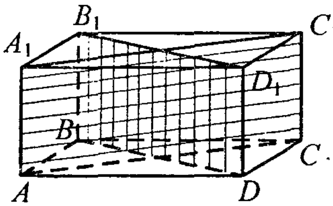
$V = S\cdot DD_1 = 60$ (см^3).

13. Основание прямого параллелепипеда — ромб, площадь которого 1 м^2. Площадь диагональных сечений 3 м^2 и 6 м^2.

Найдите объем параллелепипеда.

Основание параллелепипеда — ромб, с площадью

$S = \dfrac{1}{2}AC\cdot BD = 1$ (м^2).



Так что $AC\cdot BD = 2$ (м^2).

Диагональные сечения — прямоугольники ACC_1A_1 и BDD_1B_1 с площадями

$S_1 = AC\cdot CC_1$ и $S_2 = BD\cdot DD_1$.

Тогда $S_1 \cdot S_2 = AC \cdot BD \cdot CC_1^2 = 2CC_1^2 = 3 \cdot 6 = 18$ (м^2), так что $CC_1 = 3$ (м) и $V = S \cdot CC_1 = 1 \cdot 3 = 3$ (м^2).

14. Решите предыдущую задачу в общем случае, если площадь ромба Q, а площади диагональных сечений M и N. В основании лежит ромб.

Пусть d_1 и d_2 — диагонали ромба. Тогда $Q = \dfrac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.

Диагональными сечениями являются прямоугольники, у которых одной стороной является диагональ ромба, а другой — высота прямого параллелепипеда.

Так что их площади:

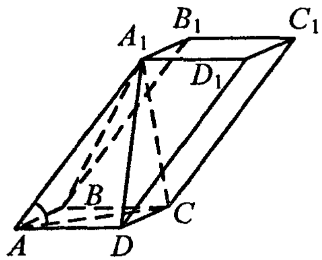
$M = d_1 \cdot h$ и $N = d_2 \cdot h$, где h — высота.

Тогда $MN = d_1 \cdot d_2 \cdot h^2 = 2Qh$.

Откуда $h^2 = \dfrac{MN}{2Q}$ и

$h = \sqrt{\dfrac{MN}{2Q}}$; Тогда $V = Q \cdot H = \sqrt{\dfrac{MNQ}{2}}$.

15. Основание наклонного параллелепипеда — квадрат, сторона которого равна 1м. Одно из боковых ребер равно 2м и образует с каждой из прилежащих сторон основания угол 60°. Найдите объем параллелепипеда.



Из точки A_1 проведем перпендикуляры к сторонам основания AD и AB. Тогда

$AA_1 \cdot \cos 60° = 2 \cdot 0{,}5 = 1$ м $= AD$.

Так что основанием перпендикуляра является точка D. Далее, $AA_1 \cdot \cos 60° = 1$ м $= AB$, так что основание перпендикуляра, опущенного из точки A_1 на AB будет в точке B. То есть $A_1D \perp AD$ и $A_1B \perp AB$.

Тогда по теореме о трех перпендикулярах $A_1C \perp DC$ и, соответственно, $A_1C \perp BC$.

Так что A_1C — высота параллелепипеда.

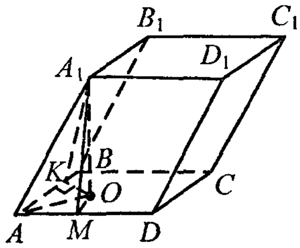
В квадрате $ABCD$ диагональ $AC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}$ (м). Тогда в прямоугольном ΔAA_1C по теореме Пифагора:

$A_1C = \sqrt{AA_1^2 - AC^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$ (м). Так что

$V = S_{ABCD} \cdot A_1C = AB^2 \cdot A_1C = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$ (м^3).

16. Грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной a и острым углом 60°.

Найдите объем параллелепипеда.



Проведем перпендикуляр A_1O к плоскости основания, а также $A_1M \perp AD$ и $A_1K \perp AB$. По теореме о трех перпендикулярах $OM \perp AD$ и $OK \perp AB$.

$\Delta AA_1M = \Delta AA_1K$ (по гипотенузе AA_1 и острому углу $\angle A_1AM = \angle A_1AK = 60°$).

Тогда $AK = AM = AA_1 \cdot \cos 60 = \dfrac{a}{2}$.

Далее, $\Delta AMO = \Delta AKO$ (по гипотенузе и катету).

Так что $\angle KAO = \angle OAM = 30°$.

$$AO = \frac{AM}{\cos\angle MAO} = \frac{a}{2\cos 30°} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

В прямоугольном ΔAA_1O по теореме Пифагора:

$$A_1O = \sqrt{AA_1^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

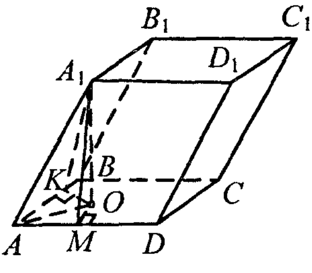
Основание параллелепипеда — ромб с площадью $S = AB \cdot AD \cdot \sin\angle BAD = a \cdot a \cdot \sin 60° = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$;

Тогда $V = S \cdot A_1O = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{a^3}{\sqrt{2}}$.

17. Каждое ребро параллелепипеда равно 1 см. У одной из вершин параллелепипеда все три плоских угла острые, по 2α каждый.

Найдите объем параллелепипеда.

Проведем перпендикуляр A_1O к плоскости основания, а также $A_1M \perp AD$ и $A_1K \perp AB$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OM \perp AD$ и $OK \perp AB$.



$\Delta AA_1M = \Delta AA_1K$ (по гипотенузе и острому углу 2α). Так что

$AK = AM = AA_1 \cdot \cos 2\alpha = \cos 2\alpha$.

Далее, $\Delta AMO = \Delta AKO$ (по гипотенузе и катету).

Так что $\angle KAO = \angle MAO = \alpha$.

$$AO = \frac{AK}{\cos\angle KAO} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}.$$

Далее, в прямоугольном ΔAA_1O по теореме Пифагора получаем:

$$A_1O = \sqrt{AA_1^2 - AO^2} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha - \cos^2 2\alpha}{\cos^2\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha - 1 - \cos 4\alpha}{2\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{2\cos^2\alpha}} = \frac{\sqrt{\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha}}{\cos\alpha} \text{ (см).}$$

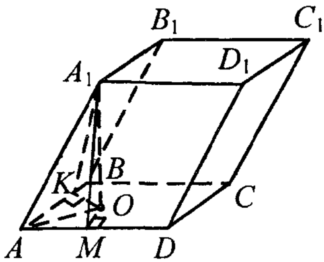
Далее, основание параллелепипеда — ромб с площадью $S = AB\cdot AD\sin\alpha = 1\cdot 1\sin 2\alpha = \sin 2\alpha$ (см^2).

Тогда объем

$$V = S\cdot AP = \sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt{\sin\alpha\sin 3\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{\sin\alpha\sin 3\alpha}}{\cos\alpha} =$$

$$= 2\sqrt{\sin^3\alpha\sin 3\alpha} \text{ (см}^3\text{).}$$

18. В параллелепипеде длины трех ребер, исходящих из одной вершины, равны a, b, c. Ребра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α. Найдите объем параллелепипеда.



Основание параллелепипеда — прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=a$ и $AD=b$. Его площадь $S=AB\cdot AD=ab$. Из точки A_1 проведем перпендикуляры A_1O к плоскости основания, а также $A_1M\perp AD$ и $A_1K\perp AB$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OM\perp AD$ и $OK\perp AB$.

Далее, $\Delta AA_1M = \Delta AA_1K$ (по гипотенузе и острому углу α).

Так что $AK = AM = AA_1\cdot\cos\alpha = c\cdot\cos\alpha$.

Далее, $\Delta AMO = \Delta AKO$ (AO — общая сторона и $AK=AM$).

Так что $\angle MAO=\angle KAO=45°$. Тогда

$$AO = \frac{AM}{\cos\angle MAO} = \frac{c\cdot\cos\alpha}{\cos 45°} = c\sqrt{2}\cos\alpha.$$

В ΔAA_1O по теореме Пифагора получаем:

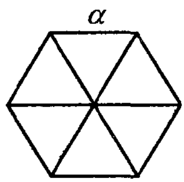
$$A_1O = \sqrt{AA_1^2 - AO^2} = \sqrt{c^2 - 2c^2\cos^2\alpha} =.$$

$$= c\sqrt{1-2\cos^2\alpha} = c\cdot\sqrt{-\cos 2\alpha}$$

Тогда $V = S_{ABCD}\cdot A_1O = abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

19. По стороне основания a и боковому ребру b найдите объем правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

Объем призмы равен $V=S_{осн}\cdot h$, где h — высота. Но в правильной призме высота равна боковому ребру, так что $h = b$ (по условию) и $V = b\cdot S_{осн}$. Тогда:



1) Основание — равносторонний треугольник.

Его площадь равна: $S_{осн} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Тогда $V = \dfrac{ba^2\sqrt{3}}{4}$.

2) Площадь квадрата
$S_{осн}=a^2$, $V=ba^2$.

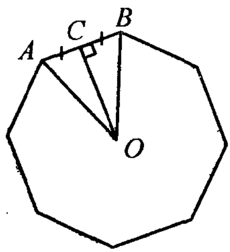
3) Правильный шестиугольник представляет собой шесть равносторонних треугольников со стороной a. Так что

$$S_{осн} = 6\cdot S_{\Delta} = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$V = \frac{3ba^2\sqrt{3}}{2}.$$

20. Деревянная плита в форме правильного восьмиугольника со стороной 3,2см. и толщиной 0,7см имеет массу 17,3 г.

Найдите плотность дерева.



В ΔBCO: $\angle OCB=90°$ и $\angle BOC=22°30'$.
Тогда

$$CO = \frac{CB}{\mathrm{tg}\angle BOC} = \frac{AB}{2\mathrm{tg}22°30'} = \frac{1,6}{\mathrm{tg}22°30'}\ (\text{см}).$$

Далее, площадь правильного восьмиугольника

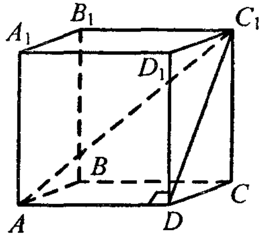
$$S = 8\cdot S_{AOB} = 8\cdot\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OC =$$

$$= 4AB\cdot CO = \frac{4\cdot 3,2\cdot 1,6}{\mathrm{tg}22°30'} = \frac{20,48}{\mathrm{tg}22°30'}\ (\text{см}^2).$$

Тогда объем трубы $V = S\cdot h = \dfrac{14,36}{\mathrm{tg}22°30'}$ (см^3).

Далее, $\rho = \dfrac{17,3\cdot\mathrm{tg}22°30'}{14,336} \approx 0,5\left(\dfrac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)$.

21. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3 5 см, а диагональ боковой грани 2,5 см. Найдите объем призмы.



Так как по условию призма правильная, то $CC_1 \perp DC$ и $DC \perp AD$. Так что по теореме о трех перпендикулярах $C_1D \perp AD$. Далее, в прямоугольном ΔAC_1D по теореме Пифагора находим:

$$AD = \sqrt{AC_1^2 - DC_1^2} = \sqrt{3{,}5^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{6} \text{ (см)}.$$

Тогда в прямоугольном ΔDC_1C по теореме Пифагора найдем:

$$C_1C = \sqrt{DC_1^2 - DC^2} = \sqrt{DC_1^2 - AD^2} = \sqrt{2{,}5^2 - 6} = 0{,}5 \text{ (см)}.$$

Далее, $V = S_{ABCD} \cdot CC_1 = AD^2 \cdot CC_1 = 6 \cdot 0{,}5 = 3$ (см^3).

22. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, боковая поверхность равновелика сумме оснований.

Найдите ее объем.

Площадь основания равна площади равностороннего треугольника со стороной a. Так что $S_{осн} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

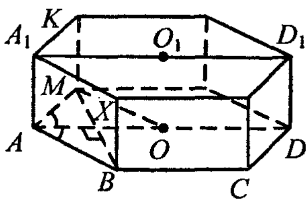
Далее, площадь боковой поверхности равна произведению периметра основания на высоту, то есть $S_{бок}$=$3a \cdot h$. Но по условию

$$S_{бок}=2S_{осн} \cdot 3a \cdot h = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4}, \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Тогда $V = S_{осн} \cdot h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3}{8}$.

23. В правильной шестиугольной призме площадь наибольшего диагонального сечения 4 м^2, а расстояние между двумя противоположными боковыми гранями 2 м.

Найдите объем призмы.



Наибольше диагональное сечение — это AA_1D_1D. Тогда AD — диаметр окружности, описанной около правильного шестиугольника. Так что $AD = 2R$ и $AB = AM = R$. $\angle MAB$ найдем по формуле:

$$\angle MAB = \frac{180° \cdot (n-2)}{n} = \frac{180° \cdot (6-2)}{6} = 120°. \text{ Тогда}$$

$\angle MAX = \frac{1}{2}\angle MAB = 60^\circ$ и $MX = \frac{1}{2}MB = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$ (м).

Далее, в прямоугольном ΔAMX: $AM = \frac{MX}{\sin\angle MAX} = \frac{1\cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Так что $R = AM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (м). Значит, $AD = 2R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (м).

А поскольку $S_{AA_1D_1D} = AA_1 \cdot AD = 4$ м^2, то $AA_1 = \frac{4\cdot 3}{4\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ (м)

Далее, площадь основания равна площади шести равносторонних Δ, то есть $S_{осн} = 6\cdot S_{AMO} =$

$$= 6\cdot\frac{1}{2}MO\cdot AO\cdot\sin 60^\circ = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ (м)^3.$$

Тогда $V = S_{осн}\cdot AA_1 = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 6$(м^3).

Ответ: 6 м^3.

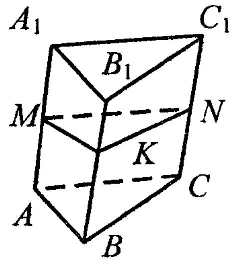
24. В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра.

Найдите объем призмы, если площадь сечения Q, а боковые ребра равны l.

Задача решена в учебнике п. 68 (202), стр. 112.

25. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15 м, а расстояние между содержащими их параллельными прямыми 26 м, 25 м и 17 м.

Найдите объем призмы.



Проведем сечение, перпендикулярное боковым ребрам. Получится ΔMNK со сторонами, равными расстояниям между параллельными прямыми, содержащими боковые ребра призмы.

Используя задачу № 24, имеем, что: объем призмы равен произведению площади сечения, проведенного перпендикулярного боковым ребрам, на длину бокового ребра.

Далее, найдем по формуле Герона S_{MNK}:

$$S = \sqrt{p(p-MK)(p-MN)(p-NK)} =$$

$$= \sqrt{34\cdot(34-26)\cdot(34-25)\cdot(34-17)} = 204\ (м^2).$$

Тогда $V = S\cdot BB_1 = 204\cdot 15 = 3060$ (м^3).

26. Вычислите пропускную способность (в кубических метрах за 1 ч) водосточной трубы, сечение которой имеет вид равнобедренного треугольника с основанием 1,4 м и высотой 1,2 м. Скорость течения воды 2 м/с.

Если d — длина труб, которую проходит вода за 1 час, то

$V = S \cdot d = S \cdot v \cdot t$,

где v — скорость течения воды за t = 1 час = 3600 сек.

S — площадь треугольника, так что $S = \frac{1}{2} \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}2 = 0{,}84(\text{м}^2)$,

поэтому количество прошедшей воды равно

$V = S \cdot v \cdot t = 0{,}84 \cdot 2 \cdot 3600 = 6048$ (м^3).

Ответ: 6048 м^3.

27. Сечение железнодорожной насыпи имеет вид трапеции с нижнем основанием 14 м, верхним 8 м и высотой 3,2 м.

Найдите, сколько кубических метров земли приходится на 1 км насыпи.

Железнодорожная насыпь представляет собой прямую призму с основанием в виде трапеции и высотой, равной боковому ребру длиной 1 км=1000 м. Тогда

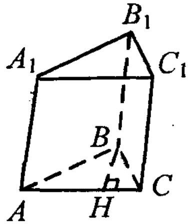
$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot l \cdot h = \frac{14+8}{2} \cdot 3{,}2 \cdot 1000 = 35200 \ (\text{м}^3).$$

28. В прямой треугольной призме стороны оснований равны 4 см, 5 см и 7 см, а боковое ребро равно большей высоте основания. Найдите объем призмы.

Найдем площадь основания по формуле Герона:

$S_{\text{осн}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$= \sqrt{8 \cdot (8-4) \cdot (8-5) \cdot (8-7)} = 4\sqrt{6}$ (см^2).



Далее, высота призмы равна боковому ребру, то есть большей высоте основания. Большая высота основания та, которая проведена к меньшему основанию. Тогда, если она равна h, то

$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} ah = 4\sqrt{6}$ (см^2). Так что

$h = \frac{2S}{a} = 2\sqrt{6}$ (см).

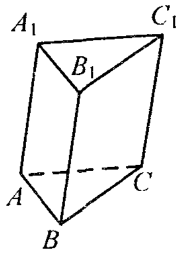
Ну, и $V = S_{\text{осн}} \cdot h = 4\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} = 48(\text{см}^3)$.

Ответ: 48 см^3.

29. Площадь основания прямой треугольной призмы равна $4 см^2$, а площади боковых граней — $9 см^2$, $10 см^2$ и $17 см^2$.

Найдите объем.

Боковые грани призмы — это прямоугольник с одной из сторон, равной длине бокового ребра, то есть AA_1, а другой — равной стороне ΔABC, лежащего в основании. Далее,



$S_{AA_1B_1B} = AB \cdot AA_1$; $S_{BCC_1B_1} = BC \cdot BB_1$;

$S_{CC_1A_1A} = AC \cdot CC_1$.

Так что в ΔABC:

$AB = \dfrac{9}{AA_1}$, $BC = \dfrac{10}{AA_1}$, $AC = \dfrac{17}{AA_1}$.

Тогда полупериметр р $\dfrac{1}{2}(AB + BC + AC) = \dfrac{18}{H}$. И по формуле Герона: $S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)}$, то есть

$$4 = \sqrt{\frac{18}{AA_1} \cdot \frac{9}{AA_1} \cdot \frac{8}{AA_1} \cdot \frac{1}{AA_1}}.$$

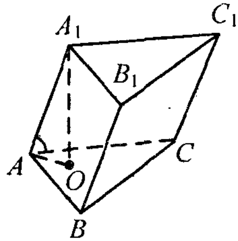
$4 = \dfrac{36}{AA_1^2}$. $AA_1^2 = 9$, или $AA_1 = 3$ (см). или $H=3$ (см).

Тогда $V = S_{ABC} \cdot AA_1 = 4 \cdot 3 = 12$ ($см^3$).

30. Основание призмы — треугольник, у которого одна сторона равна 2см, а две другие — по 3см. Боковое ребро равно 4 см и составляет с плоскостью основания угол 45°.

Найдите ребро равновеликого куба.

Проведем перпендикуляр A_1O к плоскости основания. Тогда в прямоугольном ΔAA_1O



$$A_1O = AA_1 \cdot \sin 45^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Далее, найдем площадь основания по формуле:

$S_{осн} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} =$

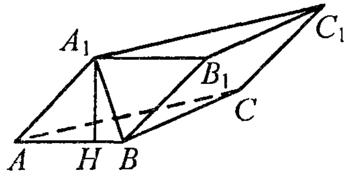
$= \sqrt{4 \cdot (4 - 2)(4 - 3)(4 - 3)} = 2\sqrt{2}$ (см). Далее, объем призмы:

$V = S_{осн} \cdot A_1O = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8$ ($см^3$). Объем куба равен

$V_1 = a^3$. Тогда, если $V_1 = V = 8$ $см^3$, то $a^3 = 8$ и $a = 2$ (см).

Ответ: 2 см.

31. Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной a; одна из боковых граней перпендикулярна основанию и является ромбом, у которого меньшая диагональ равна c. Найдите объем призмы.



Пусть грань AA_1B_1B является ромбом и перпендикулярна основанию. Тогда проведем $A_1H \perp AB$ так, что получим A_1H — высота призмы. $AB = AA_1 = a$. Площадь ΔABC равна $S_{осн} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Далее, площадь ΔAA_1B равна:

$S_{AA_1B} = \dfrac{1}{2}AB \cdot A_1H = \dfrac{a}{2}A_1H$. С другой стороны

$$S_{AA_1B} = \sqrt{p(p-AB)(p-AA_1)(p-A_1B)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2a+c}{2}\cdot\left(\frac{2a+c}{2}-a\right)\left(\frac{2a+c}{2}-a\right)\left(\frac{2a+c}{2}-c\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2a+c}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{2a-c}{2}} = \frac{c}{4}\sqrt{4a^2-c^2}.$$

Так что $A_1H = \dfrac{2S_{AA_1B}}{a} = \dfrac{c\sqrt{4a^2-c^2}}{2a}$.

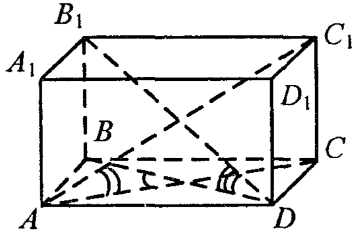
Далее, $V = S_{осн} \cdot A_1H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{c}{2a}\sqrt{4a^2-c^2} = \dfrac{ac}{8}\sqrt{12a^2-3c^2}$.

32. Чему равен объем прямой четырехугольной призмы, если ее высота h, диагонали наклонены к плоскости основания под углами α и β и острый угол между диагоналями равен γ?

В прямоугольных ΔAC_1C и ΔBDD_1 имеем:

$$AC = \frac{CC_1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{h}{\operatorname{tg}\alpha},$$

$$BD = \frac{DD_1}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{h}{\operatorname{tg}\beta}.$$

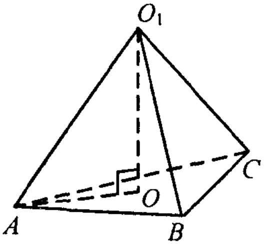


Площадь четырехугольника равна произведению диагоналей на синус угла между ними. Так что

$$S_{осн} = \frac{1}{2} AC \cdot DB \cdot \sin\gamma = \frac{h^2 \sin\gamma}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Тогда объем $V = S_{осн} \cdot h = \dfrac{h^3 \sin\gamma}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

33. По стороне основания a и боковому ребру b найдите объем правильной пирамиды: 1) треугольной, 2) четырехугольной, 3) шестиугольной.



В правильной пирамиде высота проходит через центр окружности, описанной около основания. Тогда

1) Площадь основания равна площади равностороннего треугольника:

$S_{осн} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Радиус описанной окружности $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Тогда в ΔAO_1O:

$$OO_1 = \sqrt{AO_1^2 - AO^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}}.$$ Так что

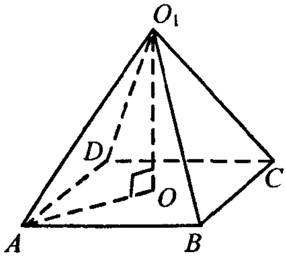
$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot OO_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}} = \frac{a^2}{12} \cdot \sqrt{3b^2 - a^2}.$$

2) Основание — квадрат с площадью $S_{осн} = a^2$. Радиус описанной окружности AO равен половине диагонали квадрата:

$AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Далее, в ΔAOO_1:

$$OO_1 = \sqrt{AO_1^2 - AO^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{2b^2 - a^2}{2}}.$$ Так что

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot OO_1 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{\frac{2b^2 - a^2}{2}} = \frac{a^2}{6}\sqrt{4b^2 - 2a^2}.$$



3) Площадь основания равна площади правильного шестиугольника, то есть площади шести равносторонних треугольников со стороной a.

$$S_{осн} = 6 \cdot S_{\Delta ABO} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}.$$

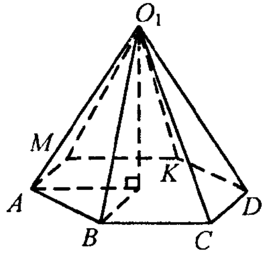
Далее, радиус описанной окружности равен стороне основания $AO = a$.

Тогда в ΔAOO_1:

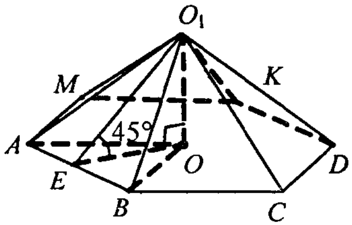
$OO_1 = \sqrt{AO_1^2 - AO^2} = \sqrt{b^2 - a^2}$. Ну и

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot OO_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} \cdot \sqrt{b^2 - a^2} =$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{3(b^2 - a^2)}.$$



34. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды a, а двугранный угол при основании равен 45°. Найдите объем пирамиды.



Проведем высоту пирамиды O_1O. В правильной пирамиде высота проходит через центр окружности, вписанной в основание. Тогда проведем $OE \perp AB$. По теореме о трех перпендикулярах $O_1E \perp AB$. Так что OE — радиус вписанной окружности, а $\angle O_1EO = 45°$ как линейный угол данного двугранного угла.

Тогда $OE = r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Далее в ΔO_1OE:

$OO_1 = OE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (так как ΔO_1OE — равнобедренный).

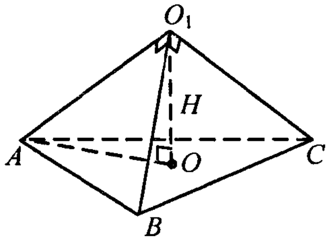
Далее площадь основания равна площади 6 равносторонних треугольников со стороной a:

$S_{\text{осн}} = 6 \cdot S_{\Delta ABO} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$. Так что

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot OO_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3a^2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}a^2.$$

35. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое ребро равно b. Найдите объем пирамиды.

Проведем высоту OO_1 пирамиды. Поскольку все боковые ребра равны, то высота пирамиды проходит через центр описанной около основания окружности. Так что $AO = R$.



Далее в равнобедренных прямоугольных ΔAO_1B. ΔBO_1C, ΔAO_1C:

$AB = BC = AC = \dfrac{b}{\sin 45^\circ} = b\sqrt{2}$.

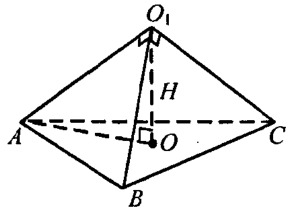
Так что в ΔABC: $AO = R = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = \dfrac{b\sqrt{6}}{3}$. Далее площадь равностороннего ΔABC равна $S_{осн} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{2}$. Затем в прямоугольном ΔAO_1O по теореме Пифагора получаем:

$$OO_1 = \sqrt{AO_1^2 - AO^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2 \cdot 6}{9}} = \frac{b\sqrt{3}}{3}.$$

Тогда $V = \dfrac{1}{3} S_{осн} \cdot OO_1 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{b^2\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{b\sqrt{3}}{3} = \dfrac{b^3}{6}$.

Ответ: $\dfrac{b^3}{6}$.

36. Чему равен объем правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания a, а боковые ребра взаимно перпендикулярны?



Площадь основания равна площади равностороннего треугольника со стороной a, то есть $S_{осн} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Далее каждая боковая грань является равнобедренным прямоугольным треугольником.

Так что $AO_1 = BO_1 = CO_1 = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Далее знаем, что высота правильной пирамиды OO_1 проходит через центр окружности, описанной около основания. Так что

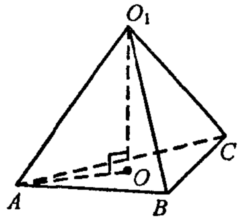
$AO = R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. По теореме Пифагора в ΔAOO_1 получим:

$$OO_1 = \sqrt{AO_1^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Тогда $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot OO_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a^3}{12\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}.$

37. По ребру a правильного тетраэдра найдите его объем.

Площадь основания тетраэдра равна площади равностороннего треугольника со стороной a.



Так что $S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Далее высота пирамиды OO_1 проходит через центр окружности, описанной около основания.

Поэтому $AO = R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

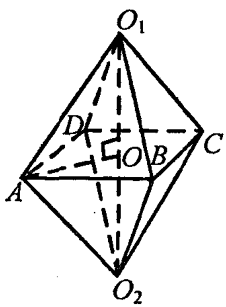
Далее в ΔAOO_1:

$$OO_1 = \sqrt{AO_1^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Тогда $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot OO_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$

38. По ребру a октаэдра найдите его объем.

Октаэдр состоит из двух правильных равных четырехугольных пирамид. Площадь основания каждой пирамиды $S_{осн}=a^2$. Высота каждой пирамиды проходит через центр окружности, описанной около квадрата, лежащего в основании.



Так что $AO = R = a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Далее в ΔAOO_1:

$$OO_1 = \sqrt{AO_1^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

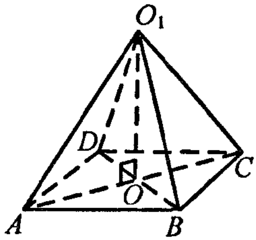
Тогда объем пирамиды

$$V_0 = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot OO_1 = \frac{1}{3} a^2 \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

А объем октаэдра равен двум объемам пирамиды $V = 2V_0 = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

39. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 9 м и 12 м, все боковые ребра равны 12,5 м.

Найдите объем пирамиды.



Так как все боковые ребра равны, то высота OO_1 пирамиды проходит через центр описанной около основания окружности. Но центр окружности, описанной около прямоугольника это точка пересечения диагоналей. Так что $AO = R = \frac{1}{2}AC$. Далее в ΔACB:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15 \text{ (м)}.$$

Поэтому $AO = \frac{1}{2}AC = 7{,}5$ (м).

Далее по теореме Пифагора в ΔAOO_1:

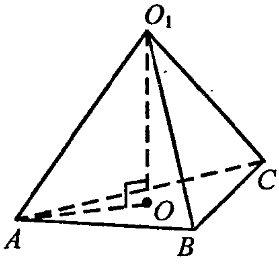
$$OO_1 = \sqrt{AO_1^2 - AO^2} = \sqrt{12{,}5^2 - 7{,}5^2} = 10 \text{ (м)}.$$

Площадь основания $S_{осн} = AB \cdot BC = 9 \cdot 12 = 108$ (м^2).

Тогда $V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot OO_1 = \frac{1}{3} \cdot 108 \cdot 10 = 360$ (м^2).

Ответ: 360 м^2.

40. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник со сторонами 6 см, 6 см и 8 см. Все боковые ребра равны 9 см. Найдите объем пирамиды.



Так как все боковые ребра равны, то высота OO_1 пирамиды проходит через центр окружности, описанной около основания. То есть $AO = R$.

Далее по формуле Герона:

$$S_{осн} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} =$$

$$= \sqrt{10(10-6)(10-6)(10-8)} = 8\sqrt{5} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Далее радиус описанной вокруг треугольника окружности найдем по формуле:

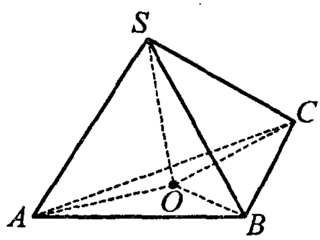
$$AO = R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 8}{4 \cdot 8\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5} \text{ (см)}.$$

Тогда в ΔAOO_1: $OO_1 = \sqrt{AO_1^2 - AO^2} = \sqrt{81 - \frac{81}{5}} = \frac{18\sqrt{5}}{5}$ (см).

Так что $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot OO_1 = \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{5} \cdot \frac{18\sqrt{5}}{5} = 48$ (см^3).

Ответ: 48 см^3.

41. Одно ребро треугольной пирамиды равно 4 см , каждое из остальных 3 см. Найдите объем пирамиды.



Пусть $AC = 4$ см, а остальные ребра равны 3 см.

$AO = BO = CO = \sqrt{9 - SO^2}$, значит O — центр описанной вокруг ΔABC окружности.

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} = \sqrt{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1} = 2\sqrt{5}$$

$$AO = BO = CO = R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{9}{2\sqrt{5}}$$

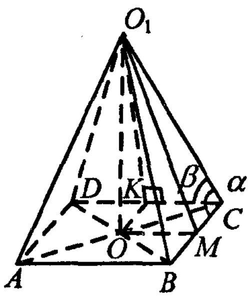
$$\frac{9}{2\sqrt{5}} = \sqrt{9 - SO^2} \Rightarrow 9 - SO^2 = \frac{81}{20} \Rightarrow SO^2 = \frac{99}{20}; \ SO = \frac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{5}} = \sqrt{11} \text{ (см}^3\text{)}$$

Ответ: $\sqrt{11}$ см^3.

42. В основании пирамиды лежит прямоугольник. Каждое боковое ребро пирамиды равно l и составляет со смежными сторонами прямоугольника углы α и β. Найдите объем пирамиды.

Так как все боковые ребра пирамиды равны, то ее высота OO_1 проходит через центр описанной около основания окружности. Центр окружности, описанной около прямоугольника, это точка пересечения диагоналей. Так что $AO = R = \frac{1}{2} AC$.



Проведем $O_1M \perp BC$ и $O_1K \perp DC$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OM \perp BC$, а $OK \perp DC$.

Так что $OMCK$ — прямоугольник и $OM = KC$.

В прямоугольных ΔO_1CM и ΔO_1CK:
$CM = O_1C \cdot \cos\alpha = l \cdot \cos\alpha$, $KC = O_1C \cdot \cos\beta = l \cdot \cos\beta$.

Далее, в прямоугольном ΔOCM по теореме Пифагора:

$$OC = R = \sqrt{OM^2 + CM^2} = \sqrt{l^2\cos^2\beta + l^2\cos^2\alpha} =$$

$$= l\sqrt{\cos^2\beta + \cos^2\alpha}.$$

Далее, в прямоугольном ΔO_1OC:

$$OO_1 = \sqrt{O_1C^2 - OC^2} = \sqrt{l^2 - l^2\cos^2\beta - l^2\cos^2\alpha} =$$

$$= l\sqrt{\sin^2\beta - \cos^2\alpha}.$$

Затем площадь основания

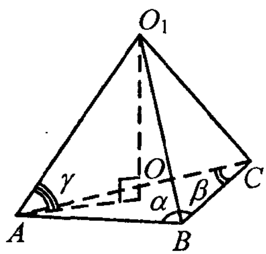
$$S_{осн} = DC \cdot BC = 2KC \cdot 2MC = 4l^2\cos\beta\cos\alpha.$$

Тогда $V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot OO_1 = \frac{1}{3} \cdot 4l^2\cos\alpha\cos\beta \cdot l\sqrt{\sin^2\beta - \cos^2\alpha} =$

$$= \frac{4}{3}l^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\beta - \cos^2\alpha}.$$

43. Найдите объем пирамиды, имеющий основанием треугольник, два угла которого а и β; радиус описанного круга R. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом γ.

Так как все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то высота пирамиды O_1O проходит через центр описанной около основания окружности.



Так что $AO = OB = OC = R$.

Далее, в прямоугольном ΔAO_1O:

$OO_1 = AO \cdot \text{tg}\gamma = R \cdot \text{tg}\gamma$.

В ΔABC $\angle BAC = 180° - (\alpha + \beta)$.

Тогда согласно теореме синусов

$$\frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin(180° - (\alpha + \beta)} = 2R.$$

Так что $AB = 2R \cdot \sin\beta$, $AC = 2R \cdot \sin\alpha$,

$BC = 2R \cdot \sin(180° - (\alpha + \beta)) = 2R \cdot \sin(\alpha + \beta)$.

Затем площадь треугольника ABC: $S_{осн} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} =$

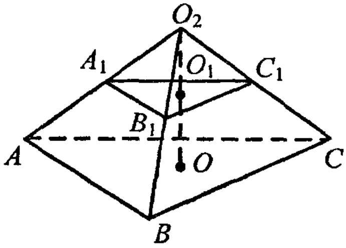
$$= \frac{2R\sin\beta \cdot 2R\sin\alpha \cdot 2R\sin(\alpha + \beta)}{4R} = 2R^2\sin\alpha \cdot \sin\beta\sin(\alpha + \beta).$$

Тогда $V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot OO_1 = \frac{2}{3}R^3\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha + \beta)\text{tg}\gamma$.

44. Найдите объем усеченной пирамиды с площадью оснований Q_1 и Q_2 ($Q_1 > Q_2$) и высотой h.

Задача решена в учебнике п. 71 (205), стр. 115.

45. В пирамиде с площадью основания Q_1 проведено сечение, параллельное основанию, на расстоянии h от него. Площадь сечения Q_2. Найдите высоту пирамиды.



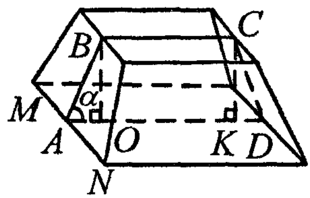
Сечение отсекает от данной пирамиды подобную пирамиду $O_2A_1B_1C_1$. Так как площади подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, то $K = \sqrt{\dfrac{Q_1}{Q_2}}$.

Линейные размеры подобных фигур относятся как коэффициент подобия. Так что $\dfrac{OO_2}{O_1O_2} = K$, так что $\dfrac{OO_2}{OO_2 - h} = \sqrt{\dfrac{Q_1}{Q_2}}$. Так что $OO_2\left(\sqrt{Q_2} - \sqrt{Q_1}\right) = -h\sqrt{Q_1}$. Так что

$$OO_2 = \frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}}.$$

46. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны нижнего и верхнего оснований равны a и b, а двугранный угол при ребре нижнего основания равен α.

Найдите объем пирамиды.



Построим осевое сечение $ABCD$; перпендикулярное стороне основания MN. Тогда $\angle BAD = \alpha$ — линейный угол данного двугранного угла. Проведем перпендикуляры $BO \perp AD$ и $CK \perp AD$.

Тогда $BO = CK$ — высота усеченной пирамиды.

Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$. $\Delta ABO = \Delta DCK$.

Так что $KD = AO = \dfrac{AD - OK}{2} = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{a-b}{2}$.

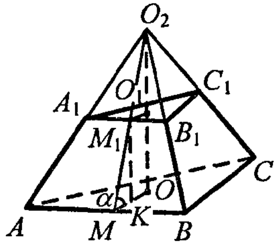
Тогда в ΔABO $BO = AO \cdot \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a-b}{2}\mathrm{tg}\alpha$.

Далее площади нижнего и верхнего оснований пирамиды равны соотвстственно $S_1 = a^2$ и $S_2 = b^2$. Тогда объем пирамиды (из задачи № 44) равен:

$$V = \frac{1}{3}BO\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{a-b}{2}\operatorname{tg}\alpha(a^2 + \sqrt{a^2b^2} + b^2) = \frac{a^3-b^3}{6}\cdot\operatorname{tg}\alpha .$$

47. Решите предыдущую задачу в случае правильной усеченной треугольной пирамиды.



Дополним данную усеченную пирамиду до полной.

Проведем высоту O_2O. Так как в правильной пирамиде высота проходит через центр окружности, вписанной в основание, то MO и M_1O_1 — радиусы окружностей, вписанных в ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$.

Далее площади равны ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ равны $S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и $S_2 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$ соответственно, а радиусы вписанных окружностей $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ и $O_1M_1 = \frac{b\sqrt{3}}{6}$.

Поскольку $OM\perp AB$, то $\angle M_1MO=\alpha$ — линейный угол данного двугранного угла.

В прямоугольной трапеции MM_1O_1O проведем $M_1K\perp MO$, тогда $MK=MO-KO=MO-M_1O_1=\frac{(a-b)\sqrt{3}}{6}$.

Далее в ΔM_1MK:

$M_1K = MK\cdot\operatorname{tg}\alpha = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha$. Так что

$$V = \frac{1}{3}M_1K\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{(a-b)\sqrt{3}}{6}\cdot\operatorname{tg}\alpha(a^2+ab+b^2)\frac{\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha}{24}.$$

48. Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию.

В каком отношении она делит объем пирамиды?

Задача решена в учебнике п. 72 (206), стр. 116.

49. Высота пирамиды h.

На каком расстоянии от вершины находится сечение, параллельное основанию и делящее ее объем пополам?

Проведенное сечение отсекает от данной пирамиды подобную. В подобных фигурах отношение линейных размеров равно коэффициенту подобия, а отношение объемов кубу коэффициента подобия.

Так что $V_1 : V_2 = k^3 = \frac{1}{2}$, то есть $k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Далее $h_1 = kh = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}$.

Ответ: $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$.

§8 (§23). Объемы и поверхности тел вращения.

1. 25 м медной проволоки имеют массу 100,7 г.

Найдите диаметр проволоки (плотность меди 8,94 $\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$).

Найдем объем проволоки:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{100{,}7}{8{,}94} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Но $V = \pi R^2 \cdot l = \frac{\pi d^2}{4} \cdot l$.Так что

$$d = \sqrt{\frac{4V}{\pi l}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 100{,}7}{8{,}94 \cdot \pi \cdot 2500}} \approx 0{,}076 \text{ (см)} = 0{,}76 \text{(мм)}.$$

2. Насос, подающий воду в паровой котел, имеет два водяных цилиндра. Диаметры цилиндров 80мм, а ход поршня 150 мм.

Чему равна часовая производительность насоса, если каждый поршень делает 50 рабочих ходов в минуту?

Объем каждого цилиндра равен $V_0 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot h = 240000\pi$ (мм^3).

Тогда за 1 минуту через насос проходит

$V_1 = 250 \cdot V_2 = 100 \cdot 240000\pi = 24 \cdot 10^6 \pi$ (мм^3) $= 24\pi$ (л).

А за 1 час =60 минут $V = 60 \cdot V_1 = 1440\pi$ (л) ≈ 4500 (л).

3. Во сколько раз надо увеличить высоту цилиндра, не меняя его основание, чтобы объем увеличился в n раз? Во сколько раз надо увеличить радиус основания цилиндра, не меняя высоту, чтобы объем увеличился в n раз?

Объем цилиндр равен $V = S_{\text{осн}} \cdot h$.

Тогда, если $\frac{V'}{V_0} = n$, то $\frac{S' \cdot h'}{S_0 \cdot h_0} = n$ и $S' = S_0$, то $h' = nh_0$.

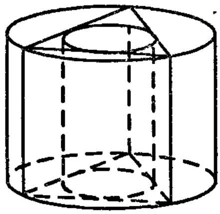
То есть, если не менять основание для того, чтобы объем увеличить в n раз, надо высоту цилиндра увеличить в n раз. Далее, если

$\frac{V'}{V_0} = n$, и $h' = h_0$, то $\frac{S' \cdot h'}{S_0 \cdot h_0} = \frac{\pi (R')^2}{\pi R_0^2} = \left(\frac{R'}{R_0}\right)^2 = n$, так что

$R' = \sqrt{n} \cdot R_0$. То есть чтобы при неизменной высоте увеличить объем цилиндра в n раз, надо радиус основания увеличить в $\sqrt{n}$ раз.

4. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в призму вписан цилиндр. Найдите отношение объемов цилиндров.

Пусть сторона основания призмы равна x.



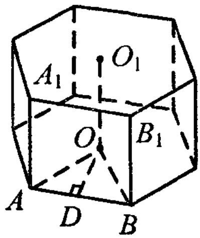
Тогда радиус цилиндра, описанного около призмы, равен радиусу окружности, описанной около правильного треугольника, со стороной x $R_1 = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

А радиус вписанного в призму цилиндра равен радиусу окружности, вписанной в правильный треугольник, со стороной x; $R_2 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Отношения объемов цилиндров:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi R_1^2 \cdot h}{\pi R_2^2 \cdot h} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \left(\frac{x \cdot \sqrt{3} \cdot 6}{3 \cdot x\sqrt{3}}\right)^2 = 4.$$

5. Найдите объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, у которой каждое ребро равно a.



По условию $H=AA_1=a$. Далее ΔAOB — равносторонний. Радиус вписанного цилиндра $OD = AO \cdot \sin\angle OAD =$

$= AO \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (так как $AO=R=AB=a$).

Тогда объем цилиндра

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi OD^2 \cdot AA_1 = \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot a = \frac{3\pi a^3}{4}.$$

6. Свинцовая труба (плотность свинца 11,4 г/см^3) с толщиной стенок 4мм имеет внутренний диаметр 13 мм.

Какова масса 25 м этой трубы?

Если внутренний диаметр d_1=1,3 см, то внешний диаметр $d_2 = 1{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 = 2{,}1$ (см).

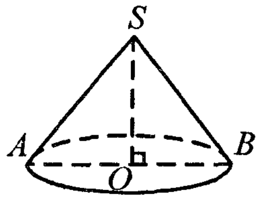
Далее, $m = \rho \cdot V = \rho(V_2 - V_1) = \rho\left(\frac{\pi d_2^2}{4} \cdot h - \frac{\pi d_1^2}{4} \cdot h\right) =$

$$= \frac{\rho\pi h}{4}(d_2^2 - d_1^2) = \frac{11{,}4 \cdot 3{,}14 \cdot 2500}{4}(2{,}1^2 - 1{,}3^2) \approx 60854(\text{г}) \approx 61(\text{кг}).$$

7. Куча щебня имеет коническую форму, радиус основания которой 2 м, а образующая 2,5 м. Найдите объем кучи щебня.

В ΔSAO по теореме Пифагора получаем:

$SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{2{,}5^2-2^2}=1{,}5$ (м).



Тогда объем кучи:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot AO^2\cdot SO=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 2^2\cdot 1{,}5=2\pi(\text{м}^3)\approx 6{,}3\ (\text{м}^3).$$

Ответ: 6,3 $м^3$.

8. Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого 9 $м^2$.

Найдите объем конуса.

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H=\frac{1}{3}\pi\cdot OB^2\cdot SO.$$

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ASB:

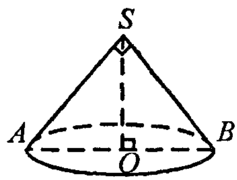
$AS=SB$ и $S=\frac{1}{2}AS\cdot SB=\frac{AS^2}{2}$.

Так что $AS=BS=\sqrt{2\cdot S}=\sqrt{2\cdot 9}=3\sqrt{2}$ (м).

Тогда $AB=\sqrt{AS^2+BS^2}=\sqrt{18+18}=6$ (м) и $AO=\frac{1}{2}AB=3$ (м).

Далее в ΔSAO:

$OS=AS\cdot\sin 45^\circ=3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3$ (м).



Так что $V=\frac{1}{3}\pi AO^2\cdot SO=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 3^2\cdot 3=$

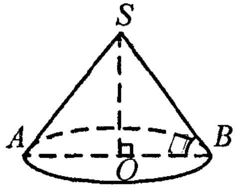
$=9\pi\ (\text{м}^3)\approx 28{,}26\ (\text{м}^3)$.

Ответ: $\approx$28,26 $м^3$.

9. Длина образующей конуса равна l, а длина окружности основания — c.

Найдите объем конуса.

Формула для длины окружности $L=2\pi R$. Так что $OB=R=\frac{c}{2\pi}$.



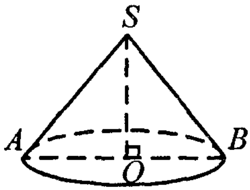
Далее в прямоугольном ΔSBO по теореме Пифагора получаем:

$$SO = \sqrt{BS^2 - OB^2} = \sqrt{l^2 - \frac{c^2}{4\pi^2}} = \frac{\sqrt{4\pi^2 l^2 - c^2}}{2\pi}.$$

Тогда $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot SO$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{c^2}{4\pi^2} \cdot \frac{\sqrt{4\pi^2 l^2 - c^2}}{2\pi} = \frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 l^2 - c^2}.$$

10. Образующая конуса составляет с плоскостью основания угол α. Найдите объем конуса.



В прямоугольном ΔSBO:

SO = BS·sinα = lsinα, а

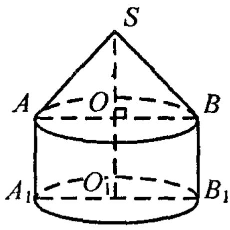
BO = BS·cosα = $l$cosα.

Тогда

$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot SO = \frac{1}{3}\pi l^2 \cos^2 \alpha l \sin\alpha = \frac{\pi l^3}{3}\cos^2\alpha \sin\alpha.$$

11. Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом. Радиус его основания 2,5 м, высота 4 м, причем цилиндрическая часть стога имеет высоту 2,2 м. Плотность сена 0,03 г/см^3.

Определите массу стога сена.



ρ = 0,03 г/см^3 = 30 кг/м^3.

$OA = R,\ OO_1 = h_1 \cdot OS = h_2.$

Тогда R = 2,5(м), h_1=2,2(м).

Так что h_2 = 4м – h_1 = 1,8 (м).

Далее, $m = V\cdot\rho = \rho\cdot(V_1 + V_2) =$

$$= \rho(\pi R^2 \cdot h_1 + \frac{1}{3}\pi R^2 h_2) = \rho\pi R^2 (h_1 + \frac{1}{3}h_2) =$$

$$= 30\pi \cdot 2{,}5^2 (2{,}2 + 0{,}6) = 525\pi\,(кг) \approx 1648{,}5 (кг).$$

Ответ: $\approx$1648,5 кг

12. Жидкость, налитая в конический сосуд высотой 0,18 м и диаметром основания 0,24 м, переливается в цилиндрический сосуд, диаметр основания которого 0,1 м.

Как высоко будет стоять уровень жидкости в сосуде?

Найдем объем конического сосуда:

$$V_0 = \frac{1}{3}\pi R_0^2 \cdot h_0 = \frac{1}{12}\pi d_0^2 \cdot h_0 = \frac{1}{12}\pi \cdot 0{,}24^2 \cdot 0{,}18 = 0{,}864\pi \cdot 10^{-3}\ (м^3).$$

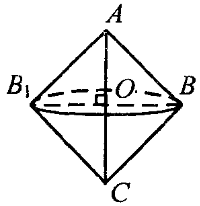
Так как объем жидкости не изменился , то объем цилиндра

$V = V_0$. То есть $\frac{\pi d^2}{4} \cdot h = V_0$.

Так что $h = \frac{4V_0}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0{,}864 \cdot \pi \cdot 10^{-3}}{\pi \cdot 0{,}01} = 0{,}3456\,(\text{м}) \approx 0{,}35(\text{м})$.

13. Равносторонний треугольник вращается вокруг своей стороны a. Найдите объем полученного тела вращения.

В равностороннем ΔABC



$OC = AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}$, а $BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Тогда объем полученного тела вращения равен сумме объемов двух одинаковых конусов с радиусом BO и высотой AO=OC.

То есть

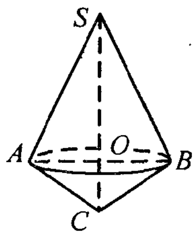
$$V = 2 \cdot V_0 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OB^2 \cdot AO = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 \cdot 3}{4} = \frac{\pi}{4}a^3.$$

14. Прямоугольный треугольник с катетами A и B вращается около гипотенузы.

Найдите объем полученного тела вращения.

Объем полученного тела вращения равен сумме объемов конусов с радиусом OB и высотами SO и CO.

Далее в ΔSBC по теореме Пифагора $CS = \sqrt{a^2 + b^2}$. Площадь треугольника SBC равна $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BS$, а также $S = \frac{1}{2} \cdot SC \cdot BO$.



Так что $BO = \frac{BC \cdot BS}{SC} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Далее $V = V_0 + V_1$

$$= \frac{1}{3}\pi OB^2 \cdot SO + \frac{1}{3}\pi OB^2 \cdot OC = \frac{1}{3}\pi OB^2(SO + CO) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi OB^2 \cdot CS$$

$$= \frac{1}{3}\pi \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b^2 \pi}{3\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

15. Найдите объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), а высота h.

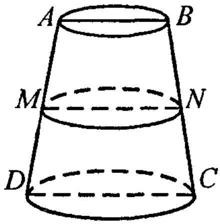
Задача решена в учебнике п. 75 (209), стр. 1.

16. Сосновое бревно длиной 15,5 м имеет диаметры концов 42см и 25см.

Какую ошибку (в процентах) совершают, когда вычисляют объем бревна, умножая его длину на площадь поперечного сечения в середине бревна?

Проведем осевое сечение $ABCD$.

Тогда MN — средняя линия трапеции $ABCD$, $AB = 25$ см $= 0{,}25$ м, $CD = 42$ см $= 0{,}42$ м. Так что



$MN = \dfrac{AB + CD}{2} = 0{,}335(\text{м})$. Далее

Объем бревна равен

$V = \dfrac{1}{3}\pi h(S_1^2 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2^2) =$

$= \dfrac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2) =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 15{,}5 \cdot (0{,}21^2 + 0{,}21 \cdot 0{,}125 + 0{,}125^2) \approx 1{,}395\ (\text{м}^3)$.

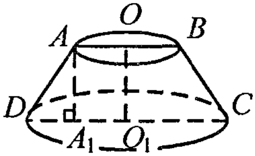
Если вычислять объем бревна путем умножения его длины на площадь поперечного сечения в середине бревна, то получим:

$V = \pi \cdot \dfrac{MN^2}{4} \cdot h = 3{,}14 \cdot \dfrac{0{,}335^2}{4} \cdot 15{,}5 \approx 1{,}365(\text{м}^3)$.

Так что допускается ошибка $\dfrac{1{,}395 - 1{,}365}{1{,}395} \cdot 100\% \approx 2{,}15\% \approx 2\%$.

17. Радиусы оснований усеченного конуса R и r, образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°.

Найдите объем.



Проведем высоту OO_1. Тогда AOO_1D — прямоугольная трапеция. Проведем $AA_1 \perp DO_1$.

AOO_1A_1 — прямоугольник, так что $AO = A_1O_1 = r$.

Тогда $DA_1 = DO_1 - A_1O_1 = R - r$.

Далее, в прямоугольном треугольнике ΔDAA_1 $\angle ADA_1 = 45°$, так что $\angle ADA_1 = 90° - \angle ADA_1 = 45°$.

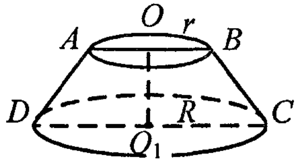
Поэтому ΔDAA_1 — равнобедренный и

$AA_1 = DA_1 = R - r = OO_1$, — высота конуса. Тогда

$$V = \frac{1}{3}\pi OO_1 \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) = \frac{1}{3}\pi(R - r)(R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{3}\pi(R^3 - r^3)$$

18. Площадь осевого сечения усеченного конуса равна разности площадей оснований, а радиусы оснований R и r.

Найдите объем этого конуса.



Площадь трапеции $ABCD$ равна разности площадей оснований, то есть

$$\frac{AB+DC}{2}\cdot OO_1 = \pi\cdot O_1C^2 - \pi\cdot OB^2,$$

$$\frac{2R+2r}{2}\cdot OO_1 = \pi R^2 - \pi r^2.$$

Так что $OO_1 = \dfrac{\pi(R^2-r^2)^2}{R+r} = \pi(R-r)$.

Тогда $V = \dfrac{1}{3}\pi OO_1(R_1^2 + Rr + r^2) = \dfrac{1}{3}\pi^2(R-r)(R^2+Rr+r^2) =$

$$= \frac{1}{3}\pi^2(R^3 - r^3).$$

19. Усеченный конус, у которого радиусы оснований 4 см и 22 см, и равновеликий цилиндр имею одну и ту же высоту.

Чему равен радиус основания этого цилиндра?

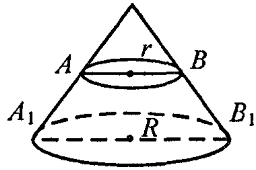
По условию объемы цилиндра и конуса одинаковы и их высоты равны, так что $V = V'$ и $h = h'$.

Так что, $\pi R^2\cdot h = \dfrac{1}{3}\pi h(4^2 + 4\cdot 22 + 22^2)$.

То есть, $R = \sqrt{\dfrac{22^2+22\cdot 4+4^2}{3}} = 14$ (см).

Ответ: 14 см.

20. По данным радиусам оснований R и r определите отношение объемов усеченного конуса и полного конуса.



Дополним усеченный конус до полного. Тогда, если V_0 — объем усеченного конуса, а V_1 — объем конуса с радиусом r, то $V = V_2 + V_1$.

Из подобия конусов следует, что если

$\dfrac{r}{R} = k$, то $\dfrac{V_1}{V} = k^3$,

Так что $\dfrac{V_0}{V} = \dfrac{V-V_1}{V} = 1 - \dfrac{V_1}{V} = 1 - k^3 = 1 - \left(\dfrac{r}{R}\right)^3$.

21. Чугунный шар регулятора имеет массу 10 кг.

Найдите диаметр шара (плотность чугуна 7,2 г/см^3).

Плотность $\rho = 7{,}2$ г/см$^3 = 7200$ кг/м^3. Далее объем шара

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{10}{7200} = \frac{1}{720}\ (\text{м}^3).$$

Так как $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi d^3}{6}$, то $d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi 720}} = \sqrt[3]{\frac{1}{120\pi}} \approx 0{,}14$ (м).

22. Требуется переплавить в один шар два чугунных шара с диаметром 25см и 35см. Найдите диаметр нового шара.

Объем нового шара равен сумме объемов данных шаров: $V=V_1+V_2$. Так что

$\frac{\pi d_0^3}{6} = \frac{\pi d_1^3}{6} + \frac{\pi d_2^3}{6}$, то есть $d_0 = \sqrt[3]{d_1^3 + d_2^3} = \sqrt[3]{25^3 + 35^3} \approx 39$ (см).

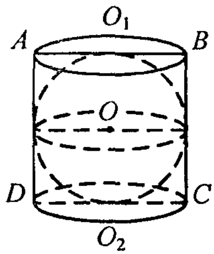
23. Имеется кусок свинца массой 1 кг.

Сколько шариков диаметром 1 см можно отлить из куска (плотность свинца 11,4 г/см^3)?

Масса одного шарика $m = V \cdot \rho = \frac{\pi d^3}{6} \cdot \rho = \frac{\pi \cdot 1^3}{6} \cdot 11{,}4 = 1{,}9\pi$ (г).

Значит, общее число шариков: $n = \frac{1\,\text{кг}}{m} = \frac{1000\,\text{г}}{1{,}9\pi\,\text{г}} \approx 167$.

24. Из деревянного цилиндра, высота которого равна диаметру основания, выточен наибольший шар. Сколько процентов материала сточено?



Радиус шара равен радиусу цилиндра и половине высоте цилиндра. Тогда, если R — радиус цилиндра, то объем шара $V_0 = \frac{4}{3}\pi R^3$, а объем цилиндра $V_2 = S_{осн} \cdot 2R = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$.

Тогда объем сточенного материала

$$V' = V - V_0 = 2\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$$

А процентное соотношение:

$$\frac{V'}{V} \cdot 100\% = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{2\pi R^3} \cdot 100\% = 33\frac{1}{3}\%.$$

25. Внешний диаметр полого шара 18 см. Толщина стенок 3 см. Найдите объем материала, из которого изготовлен шар.

Внешний радиус $R = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$(см).

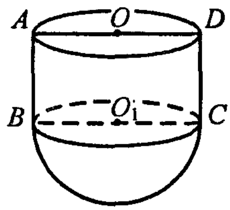
Тогда внутренний радиус $r = R - \frac{2}{3} = 6$(см).

Объем материала равен разности объемов внешнего и внутреннего шаров, то есть $V = V_1 - V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) =$

$= \frac{4}{3}\pi \cdot (9^3 - 6^3) = 684\pi \approx 2148$ (см^3).

26. Сосуд имеет форму полушара радиуса R, дополненного цилиндром.

Какой высоты должна быть цилиндрическая часть, чтобы сосуд имел объем V?



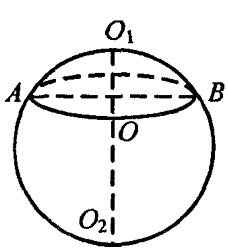
Объем сосуда равен сумме объемов полушара радиусом R и цилиндра с радиусом основания R и искомой высотой X.

То есть $V = \frac{2}{3}\pi R^3 + \pi R^2 \cdot X$.

$$X = \frac{V - \frac{2}{3}\pi R^3}{\pi R^2} = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{2}{3}R.$$

27. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делят его на части 3 см и 9 см.

На какие части делится объем шара?



$OO_1 = 3$ см, так что объем верхнего сегмента равен $V_1 = \pi OO_1^2 \cdot \left(R - \frac{OO_1}{3}\right)$.

$V_1 = \pi \cdot 3^2 \cdot \left(6 - \frac{3}{3}\right) = 45\pi$ (см^3), так как

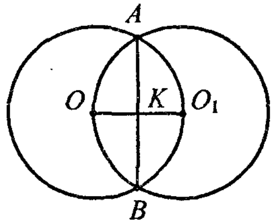
$R = \frac{O_1O_2}{2} = \frac{3+9}{2} = 6$ (см) — радиус шара.

Тогда объем нижней части равен разности объемов шара и верхнего сегмента, то есть

$$V_2 = V_0 - V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 - V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 - 45\pi = 243\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

28. Какую часть объема шара составляет объем шарового сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?

Высота $h = 0{,}1d = 0{,}2R$.



Тогда объем шарового сегмента

$$V_0 = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) =$$

$$= 0{,}04\pi R^2\left(R - \frac{0{,}2R}{3}\right) = \frac{0{,}112\pi R^3}{3}.$$

Так что $\dfrac{V_0}{V} = \dfrac{0{,}112\pi R^3}{3 \cdot \dfrac{4}{3}\pi R^3} = \dfrac{0{,}112}{4} = 0{,}028$.

29. Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого.

Как относится объем общей части шаров к объему целого шара?

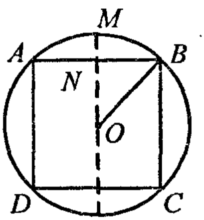
Общая часть шаров представляет собой сумму двух одинаковых шаровых сегментов с высотой $OK = \dfrac{1}{2}R$, где R — радиус шаров.

Так что $V_0 = 2\pi OK^2\left(R - \dfrac{OK}{3}\right) = 2\pi \cdot \dfrac{R^2}{4}\left(R - \dfrac{R}{6}\right) = \dfrac{5R^3\pi}{12}$.

$$\frac{V_0}{V} = \frac{5\pi R^3 \cdot 3}{12 \cdot 4\pi R^3} = \frac{5}{16}.$$

30. Диаметр шара, равный 30 см, является осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 см. Найдите объем части шара, заключенный внутри цилиндра.

Рассмотрим осевое сечение шара. Объем части шара, заключенный внутри цилиндра, равен сумме объемов цилиндра с радиусом основания NB=12 см и высотой BC, а также двух одинаковых шаровых сегментов с высотой MN.



Имеем в ΔOBN: $OB = \dfrac{1}{2} \cdot 30 = 15$(см) и $NB = 12$ (см).

Так что по теореме Пифагора:

$$ON = \sqrt{OB^2 - NB^2} = 9 \text{(см)}.$$

Далее BC = 2NO = 18 (см) и $NM = OM - ON = 15 - 9 = 6$ (см).

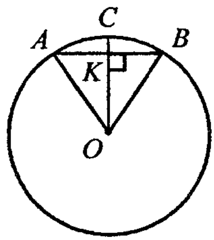
Так что объем шарового сегмента $V_1 = \pi NM^2\left(R - \frac{NM}{3}\right) =$

$= 36\pi(R-2) = 36\pi\cdot 13 = 468\pi$ (см^3).

Объем цилиндра $V_2 = \pi NB^2\cdot BC = \pi\cdot 12^2\cdot 18 = 2592\pi$ (см^3).

Так что общий объем $V = 2V_1 + V_2 = 3528\pi$ (см^3).

31. Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности его основания 60 см, а радиус шара 75 см.



Рассмотрим осевое сечение шара. В прямоугольном ΔOBK $OB = 75$ см, $KB = 60$ см (по условию).

Тогда по теореме Пифагора

$OK = \sqrt{OB^2 - BK^2} = \sqrt{75^2 - 60^2} = 45$ (см).

Так что высота шарового сегмента

$CK = CO - OK = 75 - 45 = 30$ (см).

И объем одного сегмента:

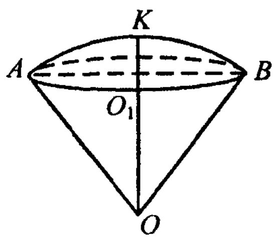
$$V_1 = \frac{2}{3}\pi CO^2 \cdot CK = \frac{2}{3}\pi \cdot 75^2 \cdot 30 = 112500\pi \text{ (см}^3) = 112{,}5\pi \text{ (дм}^3).$$

Объем оставшегося шарового сектора равен разности объема шара и найденного объема сегмента:

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi CO^3 - V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 75^3 - 112500\pi = 450000 \text{ (см}^3) = 450\pi \text{ (дм}^3).$$

32. Круговой сектор с углом 30° и радиусом R вращается около одного из боковых радиусов.

Найдите объем полученного тела.



В прямоугольном ΔOO_1B_1

$BO = R$, $\angle BOO_1 = 30°$.

Так что, $OO_1 = BO\cdot\cos 30° = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Далее, высота полученного шарового сегмента

$KO_1 = KO - OO_1 =$

$= R - R\,\frac{\sqrt{3}}{2} = R\,\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Так что его объем

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot O_1K = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot R \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2} = \pi R^3\,\frac{2-\sqrt{3}}{3}.$$

33. Поверхности двух шаров относятся как $m:n$.

Как относятся их объемы?

Поверхность вычисляется по формуле S = 4πR. Тогда, если

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \frac{m}{n}, \text{ то } \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{m}{n}}\text{ ; так что}$$

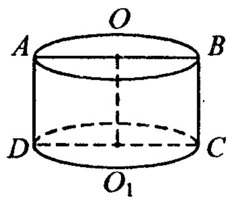
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^3 = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

34. Гипотенуза и катеты треугольника являются диаметрами трех шаров. Какая существует зависимость между их поверхностями?

По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике: $c^2 = a^2 + b^2$.

Так что $\pi c^2 = \pi a^2 + \pi b^2$. Площадь поверхности шара равна $S = \pi d^2$, так что площадь шара с диаметром, равным гипотенузе, равна сумме двух шаров с диаметрами, равными катетам.

35. Поверхность тела, образуемого вращением квадрата около стороны, равновелика поверхности шара, имеющего радиусом сторону квадрата. Докажите.



Так как $OBCO_1$ — квадрат, то высота цилиндра OO_1 равна радиусу основания OB.

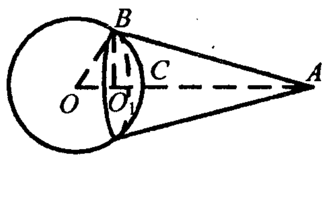
Площадь поверхности цилиндра равна сумме площадей боковой поверхности и двух оснований:
$S_1 = 2S_{осн} + S_{бок} = 2\pi OB^2 + 2\pi OB \cdot OO_1 = 4\pi OB^2$.

Далее, площадь поверхности шара, имеющего радиусом сторону основания, равна $S_2 = 4\pi R^2 = 4\pi OB^2 = S$.

Что и требовалось доказать.

36. Радиус шара 15 см. Какую площадь имеет часть его поверхности, видимая из точки, удаленной от центра на 25 см?

В прямоугольном треугольнике катет является средним геометрическим между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу. Так что в ΔOBA: $OB^2 = OA \cdot OO_1$.



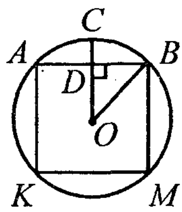
Так что $OO_1 = \frac{OB^2}{OA} = \frac{15^2}{25} = 9$ (см).

Поэтому $O_1C = OC - OO_1 = 15 - 9 = 6$ (см).

Так что площадь видимого сферического сегмента равна
$S = 2\pi R \cdot O_1C = 2\pi OB \cdot O_1C = 2\pi \cdot 15 \cdot 6 = 180\pi$ (см^2).

37. Шар радиусом 10 см цилиндрически просверлен по оси. Диаметр отверстия 12 см.

Найдите полную поверхность тела.



Рассмотрим осевое сечение шара.

Тогда $OB = R = 10$ (см)

$BD = r = \frac{1}{2} D = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (см).

Так что в ΔDBO по теореме Пифагора получим:

$OD = \sqrt{OB^2 - BD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см).

Площадь искомой поверхности равна сумме площади боковой поверхности цилиндра с радиусом основания, равным DB, и высотой $BM = 2 \cdot OD = 2 \cdot 8 = 16$ (см) и площади S', равной разности площадей шара и двух шаровых сегментов с высотой

$CD = CO - OD = 10 - 8 = 2$ (см).

То есть $S = S_0 + S' = 2\pi \cdot DB \cdot BM + (4\pi \cdot OB^2 - 2 \cdot 2\pi \quad OB \cdot CD) =$
$= \pi(2 \cdot 6 \cdot 16 + 4 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 \cdot 2) = 512\pi$ (см^3).

38. Цилиндрическая дымовая труба с диаметром 65 см имеет высоту 18 м.

Сколько жести нужно для ее изготовления, если на заклепки уходит 10% материала?

Боковая поверхность трубы равна боковой поверхности цилиндра с радиусом $R = \frac{1}{2} \cdot 65 = 32{,}5$(см) и высотой $h = 18$ (м).

$S_{бок} = 2\pi Rh = 2\pi \cdot 0{,}325 \cdot 18 = 11{,}7$ (м^2).
$S = \pi D \cdot H.$

Учитывая, что на заклепки уходит 10% материала, то общее количество его: $S = 1{,}1 S_{бок} = 1{,}1 \cdot 11{,}7\pi \approx 40{,}4$ (м^2).

39. Полуцилиндрический свод подвала имеет 6 м в длину и 5,8 м в диаметре. Найдите полную поверхность подвала.

Полная поверхность подвала состоит из половины полной поверхности цилиндра и площади пола, т. е. площади прямоугольника со сторонами $h = 6$ м и $d = 5{,}8$ м.

Так что $S = \frac{1}{2}(S_{бок} + 2S_{осн}) + h \cdot d = \frac{1}{2}\left(\pi dh + \frac{\pi d^2}{2}\right) + h \cdot d =$

$= \frac{1}{2}(\pi \cdot 5{,}8 \cdot 6 + 16{,}82\pi) + 34{,}8 = 25{,}81\pi + 34{,}8 \approx 116(\text{м}^2)$.

Ответ: 116 (м^2).

40. Из круглого листа металла выштампован цилиндрический стакан диаметром 25 см и высотой 50 см. Предполагая, что площадь листа при штамповке не изменилась, найдите диаметр листа.

Площадь стакана S_0 равна сумме площади боковой поверхности цилиндра и площади основания

$$S_0 = \frac{\pi d^2}{4} + \pi dh = \frac{\pi \cdot 25^2}{4} + \pi \cdot 25 \cdot 50 = 1406{,}25\pi\ (\text{см}^2).$$

Так как площадь не изменилась, то $S = \frac{\pi d^2}{4} = S_0$.

Откуда $d = \sqrt{\frac{4S_0}{\pi}} = \sqrt{5625} = 75$ (см).

Ответ: 75 (см).

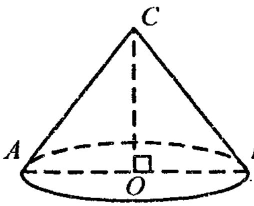
41. В цилиндре площадь основания равна Q, а площадь осевого сечения M.

Чему равна полная поверхность цилиндра?

Осевым сечением цилиндра является прямоугольник со сторонами d — диаметр и h — высота цилиндра, так что $M = d \cdot h$.

Далее, $S = S_{бок} + 2S_{осн} = \pi d \cdot h + 2Q = \pi M + 2Q$.

42. Конусообразная палатка высотой 3,5 м и диаметром основания 4 м покрыта парусиной. Сколько квадратных метров парусины пошло на палатку?



$BO = \frac{1}{2} AB = 2$ (м).

В прямоугольном ΔCBO по теореме Пифагора получим:

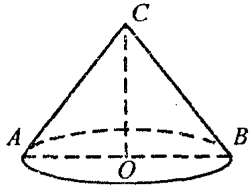
$CB = \sqrt{CO^2 + BO^2} = \sqrt{3{,}5^2 + 2^2} = \sqrt{16{,}25}$ (м).

Далее площадь боковой поверхности конуса

$S = \pi Rl = \pi \cdot OB \cdot BC = \pi \cdot 2 \cdot \sqrt{16{,}25} \approx 25{,}3$ (см^2).

43. Крыша башни имеет форму конуса. Высота крыши 2 м, диаметр башни 6 м.

Найдите поверхность крыши.



$OB = \frac{1}{2} AB = 3$ (м).

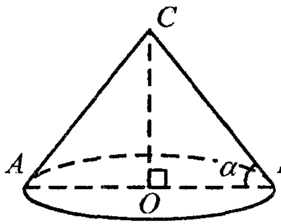
В прямоугольном ΔCBO по теореме Пифагора получим

$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ (м).

Далее, $S = \pi \cdot Rl = \pi \cdot OB \cdot BC = \pi \cdot 3\sqrt{13} \approx 34(\text{м}^2)$.

Ответ: 34 (м^2).

44. Площадь основания конуса S, а образующие наклонены к плоскости основания под углом a. Найдите боковую поверхность конуса



Площадь основания конуса

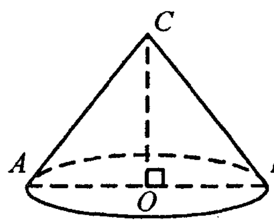
$S = \pi R^2 = \pi \cdot OB^2$. Откуда $R = OB = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$.

Далее, в прямоугольном ΔCBO:

$CB = \dfrac{OB}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha} \cdot \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$.

Тогда, $S_{бок} = \pi Rl = \pi OB \cdot BC = \pi \cdot \sqrt{\dfrac{S}{\pi}} \cdot \dfrac{1}{\cos\alpha} \cdot \sqrt{\dfrac{S}{\pi}} = \dfrac{S}{\cos\alpha}$.

45. Как относятся между собой боковая и полная поверхности равностороннего конуса (в сечении правильный треугольник)?



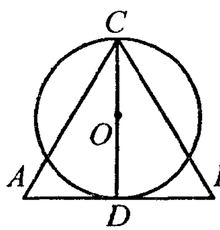
Так как ΔABC — равносторонний, то $R=OB=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}BC$. Тогда боковая поверхность равна

$S_{бок} = \pi Rl = \pi R \cdot BC = \pi R \cdot 2R = 2\pi R^2$.

А полная поверхность равна $S = S_{бок} + S_{осн} = 2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2$.

Так что $\dfrac{S_{бок}}{S} = \dfrac{2\pi R^2}{3\pi R^2} = \dfrac{2}{3}$.

46. Полная поверхность равностороннего конуса равновелика поверхности шара, построенного на его высоте как на диаметре. Докажите.

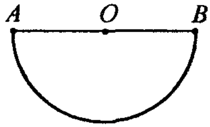


Полная поверхность равностороннего конуса равна $S_0 = 3\pi R^2$ (смотри задачу № 45).

Далее рассмотрим осевое сечение. Тогда в равностороннем ΔABC высота $CD = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$. Так что $OD = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ и площадь поверхности шара равна

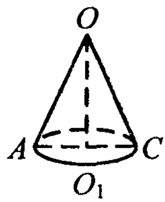
$S = 4\pi OC^2 = 4\pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi R^2 = S_0$. Что и требовалось доказать.

47. Полукруг свернут в коническую поверхность. Найдите угол между образующей и осью конуса.



а) При сворачивании полукруга в конус длина дуги AB будет равна длине окружности основания конуса. Так что

$$l_1 = \frac{2\pi \cdot AO}{2} = \pi \cdot AO = 2\pi \cdot AO_1 .$$



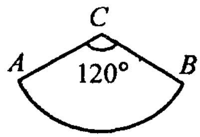
Так что $AO_1 = \frac{AO}{2}$.

б) В прямоугольном ΔAOO_1:

$\sin\angle AOO_1 = \frac{AO_1}{AO} = \frac{1}{2}$. Так что $\angle AOO_1 = 30°$.

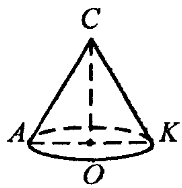
Ответ: 30°.

48. Радиус кругового сектора равен 3 м, его угол 120°. Сектор свернут в коническую поверхность. Найдите радиус основания конуса.



а) Длина окружности основания конуса (б) равна длине дуги AB. То есть

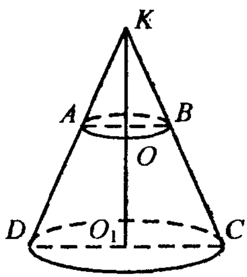
$$l = \frac{2\pi AC \cdot 120°}{360°} = \frac{2\pi \cdot 3}{3} = 2\pi = l = 2\pi AO .$$



б) Так что АО$= \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ (м).

Ответ: 1 м.

49. Сколько квадратных метров латунного листа потребуется, чтобы сделать рупор , у которого диаметр одного конца 0,43 м, другого конца — 0,036 м и образующая — 1,42 м?



Дополним усеченный конус до полного. Тогда из подобия конусов следует, что $\frac{AB}{DC} = \frac{KB}{KC}$. Пусть $KB = a$.

Тогда $\frac{0,036}{0,43} = \frac{a}{a+1,42}$.

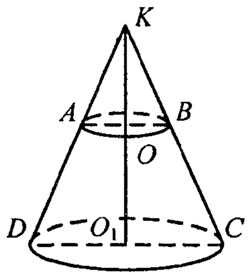
Так что а ≈ 0,1297 (м) и КС = a + 1,42 =1,5497 (м).

Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна разности площадей боковых поверхностей конусов:

$$S = S_1 - S_2 = \pi \cdot O_1C \cdot KC - \pi \cdot OB \cdot KB = \pi\left(\frac{DC}{2} \cdot KC - \frac{AB}{2} \cdot KB\right) =$$

$$= \pi\,(0,215 \cdot 1,5497 - 0,018 \cdot 0,1297) \approx 1,04\ (\text{м}^2).$$

50. Сколько олифы потребуется для окраски внешней поверхности 100 ведер, имеющих форму усеченного конуса с диаметрами оснований 25 см и 30 см и образующей 27,5 см, если на 1 м^2 требуется 150 г олифы?



Дополним усеченный конус до полного. Пусть $KB = a$.

Из подобия конусов следует:

$\frac{AB}{DC} = \frac{KB}{KC}$, $\frac{25}{30} = \frac{a}{a+27,5}$, откуда

$KB = a = 137,5$ (см) и

$KC = a + 27,5 = 165$ (см).

Полная площадь ведра состоит из

площади основания $S_{осн} = \frac{\pi AB^2}{4} = 156,25\pi$ (см^2) и боковой поверхности ведра, равной разности боковых поверхностей конусов:

$$S_{бок} = S_1 - S_2 = \pi\left(\frac{DC}{2} \cdot KC - \frac{AB}{2} \cdot KB\right) =$$

$$= \pi(15 \cdot 165 - 12,5 \cdot 137,5) = 756,25\pi\ (\text{см}^2).$$

Так что $S = S_{осн} + S_{бок} = 912,5$ (см^2)=0,09125 (м^2).

Общее количество краски m=100·S·150≈4300 (г)=4,3 кг.

§ 9. Избранные вопросы планиметрии

1. Даны сторона и два угла треугольника. Найдите третий угол угол и отсальные две стороны, если: 1) $b = 12$, $\alpha = 36°$, $\beta = 25°$; 2) $c = 14$, $\alpha = 64°$, $\beta = 48°$.

1) $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 119°$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow a = b\cdot\frac{\sin 36°}{\sin 25°} \approx 16,7$$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow c = b\cdot\frac{\sin 119°}{\sin 25°} \approx 24,8$$

2) $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 68°$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow a = b\cdot\frac{\sin 64°}{\sin 68°} \approx 13,6$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow b = c\cdot\frac{\sin 48°}{\sin 68°} \approx 11,2$$

2. Даны две стороны и угол между ними. Найдите остальные два угла и третью сторону, если: 1) $b = 14$, $c = 10$, $\alpha = 145°$; 2) $a = 32$, $c = 23$, $\beta = 152°$; 3) $a = 24$, $c = 18$, $\beta = 15°$.

1) $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha} \approx 22,9$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a} \Rightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{b\sin\alpha}{a}\right) \approx 21°$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{b\sin\alpha}{a} \Rightarrow \gamma = \arcsin\left(\frac{c\sin\alpha}{a}\right) \approx 15°$$

2) $b^2 = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta} \approx 53,4$

$$\alpha = \arcsin\frac{a\sin\beta}{b} \approx 16°$$

$$\gamma = \arcsin\frac{c\sin\beta}{b} \approx 12°$$

3) $b^2 = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta} \approx 8,1$

$$\gamma = \arcsin\frac{c\sin\beta}{b} \approx 35°$$

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 130°$$

3. В треугольнике заданы две стороны и угол, противолежащий одной из них. Найдите остальные углы и сторону треугольника, если: 1) $a = 34$, $b = 12$, $\alpha = 164°$; 2) $a = 2$, $b = 4$, $\alpha = 60°$; 3) $a = 6$, $b = 8$, $\alpha = 30°$.

1) $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \beta = \arcsin\left(\dfrac{b}{a}\sin\alpha\right) \approx 6°$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 10°$

$c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx 22{,}3$

2) $\beta = \arcsin\left(\dfrac{b}{a}\sin\alpha\right) = \arcsin\sqrt{3}$ — не существует, т.е. задача не имеет решения.

3) По теореме синусов находим $\sin\beta$. По $\sin\beta$ находим отвечающие ему углы β_1 и β_2. Выбираем из них один или оба, имея в виду, что против большей из сторон a и b лежит больший угол. Зная углы α и β, находим угол $\gamma = 180° - \alpha - \beta$, а затем сторону c по теореме синусов. Эта задача в отличие от двух предыдущих может не иметь решения, иметь одно или два решения.

4. Даны три стороны треугольника. Найдите его углы, если:
1) $a = 15$, $b = 24$, $c = 18$; 2) $a = 23$, $b = 17$, $c = 39$;
3) $a = 55$, $b = 21$, $c = 38$.

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$225 = 576 + 324 - 2 \cdot 24 \cdot 18 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \alpha \approx 39°$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2bc\cos\beta \Rightarrow \beta \approx 93°$

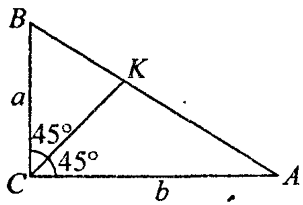
$b^2 = a^2 + c^2 - 2bc\cos\beta \Rightarrow \beta \approx 93°$

$\gamma = 180 - \alpha - \beta \approx 48°$

2) Аналогичный пункту 1): $\alpha \approx 15°$, $\beta \approx 11°$, $\gamma \approx 154°$

3) Аналогичный пункту 1): $\alpha \approx 136°$, $\beta \approx 15°$, $\gamma \approx 29°$.

5. Найдите биссектрису прямоугольного треугольника с катетами a и b, проведенную из вершины прямого угла.



$$CK = \frac{\sqrt{ab\left((a+b)^2 - \left(a^2 + b^2\right)\right)}}{a+b} = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$$

6. Докажите, что если две медианы или две биссектрисы треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный.

Пусть две медианы треугольника, например m_a и m_b равны. Тогда:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}$$

$$2b^2+2c^2-a^2=2a^2+20^2-b^2$$

$$3b^2=3a^2$$

$b=a$, т.е. треугольник равнобедренный основанием C.

Пусть две биссектрисы треугольника, например l_a и l_b равны. Тогда:

$$\frac{\sqrt{bc\left((b+c)^2-a^2\right)}}{b+c}=\frac{\sqrt{ac\left((a+c)^2-b^2\right)}}{a+c}$$

$$\frac{bc\left((b+c)^2-a^2\right)}{(b+c)^2}=\frac{ac\left((a+c)^2-b^2\right)}{(a+c)^2}$$

$$\frac{bc\left(b+c-a\right)\left(b+c+a\right)}{(b+c)^2}=\frac{ac\left(a+c-b\right)\left(a+c+b\right)}{(a+c)^2}$$

$$b(b+c-a)(a+c)^2=a(a+c-b)(b+c)^2$$

$$\left(b^2+bc-ab\right)\left(a^2+2ac+c^2\right)=\left(a^2+ac-ab\right)\left(b^2+2bc+c^2\right)$$

$$a^2b^2+2ab^2c+b^2c^2+a^2bc+2abc^2+bc^3-a^3b-2a^2bc-abc^2=$$

$$=a^2b^2+2a^2bc+a^2c^2+ab^2c+2abc^2+ac^3-ab^3-2ab^2c-abc^2$$

$$3ab^2-3a^2bc+b^2c^2-a^2c^2+bc^3-ac^3+ab^3-a^3b=0$$

$$3abc(b-a)+c^2(b-a)(b+a)+c^3(b-a)+ab(b-a)(b+a)=0$$

$$(b-a)(3abc+c^2(b+a)+c^3+ab(a+b))=0$$

$a=b$, т.е. треугольник равнобедренный с основанием C.

7. Докажите, что медиана треугольника не меньше его биссектрисы, проведенной из той же вершины.

Докажем, например, что $m_a\ge l_a$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}\ge\frac{\sqrt{bc\left((b+c)^2-a^2\right)}}{b+c}$$

$$2\left(b^2+c^2\right)-a^2\ge\frac{4bc\left((b+c)^2-a^2\right)}{(b+c)^2}$$

$$\left(b^2+2bc+c^2\right)\left(2b^2+2c^2-c^2\right)\ge 4bc\left(b^2+c^2-a^2+2bc\right)$$

$$2b^4+\cancel{2b^2c^2}-a^2b^2+\cancel{4b^3c}+\cancel{4bc^3}-2a^2bc+\cancel{2b^2c^2}+2c^4-a^2c^2\ge$$

$$\ge 4b^3c+4bc^3-4a^2bc+\cancel{8b^2c^2}$$

$$2b^4-4b^2c^2+2c^4-a^2b^2+2a^2bc-a^2c^2\ge 0$$

$$2\left(b^2-c^2\right)-a^2(b-c)^2\ge 0$$

$$2\left(b-c\right)^2\left(b+c\right)^2\ge a^2(b-c)^2$$

$2(b+c)^2\ge a^2$ — верно в силу неравенства треугольника.

8. Найдите выражения для сторон треугольника через его медианы.

$$\begin{cases}2b^2+2c^2-a^2=4m_a^2\\ 2a^2+2c^2-b^2=4m_b^2\\ 2a^2+2b^2-c^2=4m_c^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\sqrt{2\left(m_b^2+m_c^2\right)-m_a^2}\\ b=\dfrac{2}{3}\sqrt{2\left(m_a^2+m_c^2\right)-m_b^2}\\ c=\dfrac{2}{3}\sqrt{2\left(m_a^2+m_b^2\right)-m_c^2}\end{cases}$$

10. Найдите площадь треугольника с данными сторонами:

1) $\dfrac{25}{6}$, $\dfrac{29}{6}$, 6; 2) 13, $37\dfrac{12}{13}$, $47\dfrac{1}{13}$; 3) $2\dfrac{1}{12}$, $3\dfrac{44}{75}$, 1,83.

1) $$p=\frac{\frac{25}{6}+\frac{29}{6}+6}{2}=\frac{15}{2}$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2}}=10$$

2) $$p=\frac{13+37\frac{12}{13}+47\frac{1}{13}}{2}=49$$

$$S=\sqrt{49\cdot 36\cdot 11\frac{1}{13}\cdot 1\frac{12}{13}}=7\cdot 6\cdot\sqrt{\frac{144}{13}\cdot\frac{25}{13}}=\frac{7\cdot 6\cdot 12\cdot 5}{13}=\frac{2520}{13}$$

3) $$p=\frac{\frac{25}{12}+\frac{269}{75}+\frac{183}{100}}{2}=\frac{25^2+4\cdot 269+3\cdot 183}{2\cdot 300}=\frac{1125}{300}=\frac{225}{60}=\frac{15}{4}$$

$$S=\sqrt{\frac{15}{4}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{49}{300}\cdot\frac{576}{300}}=\frac{5}{2}\cdot\frac{7\cdot 24}{3\cdot 100}=1,4$$

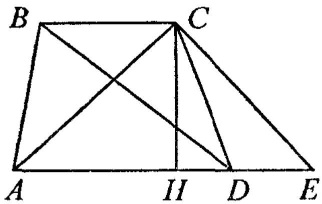
11. Найдите наименьшую высоту треугольника со сторонами, равными 17, 65, 80, и наибольшую высоту треугольника со сторонами, равными 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$.

$p_1 = \frac{17+65+80}{2} = 81$ $\qquad$ $p_2 = 49$ (см. № 10. 2)

$S_1 = \sqrt{81\cdot16\cdot11\cdot64} = 288$ $\qquad$ $S_2 = \frac{2520}{13}$

$h_{наим} = \frac{2\cdot288}{80} = 7{,}2$ $\qquad$ $h_{наиб} = \frac{2\cdot\frac{2520}{13}}{13} = \frac{5040}{169}$

12. Основания трапеции равны 19 см и 31 см, а диагонали — 39 см и 41 см. Найдите высоту трапеции.



Проведем через точку C прямую, параллельную диагонали трапеции BD. Пусть E — точка пересечения этой прямой с прямой AD.

$BCDE$ — параллелограмм, $DE = BC = 19$ см.

Рассмотрим ΔACE со сторонами 39 см, 41 см и $(31 + 19) = 50$ см

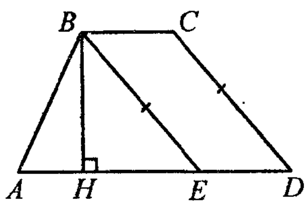
Вычислим его площадь.

$P = \frac{39+41+50}{2} = 65$

$S = \sqrt{65\cdot25\cdot24\cdot26} = 780$

$CH = \frac{2S}{AE} = 31{,}2$ (см)

13. Основания трапеции равны 5 см и $2\frac{11}{12}$ см, а боковые стороны — $3\frac{44}{75}$ см и 1,83 см. Найдите высоту трапеции.



Проведем через точку B прямую, параллельную CD и пусть эта прямая пересекает основание AD в точке E.

Рассмотрим ΔABE со сторонами $3\frac{44}{75}$ см, 1,83 см и

$\left(5-2\frac{11}{12}\right) = 2\frac{1}{12}$ см.

Его площадь равна 1,4 (см. № 10 3))

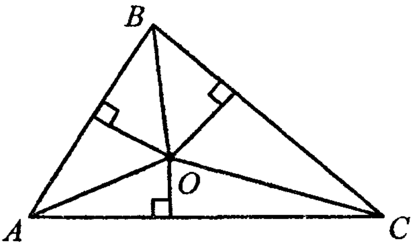
$$BH = \frac{2 \cdot 1,4}{2\frac{1}{12}} = \frac{12}{25} \cdot 2,8 = 1,344 \text{ (см)}$$

14. Найдите стороны треугольника, ABC, если площади тре угольников ABO, BCO и ACO, где O — центр вписанной окружно сти, равны 52 дм^2, 30 дм^2 и 74 дм^2.

$$S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} r \cdot AB \Rightarrow AB = \frac{2 \cdot 52}{r} = \frac{104}{r}$$

$$BC = \frac{60}{r}; \; AC = \frac{148}{2}$$

$$p = \frac{\frac{104}{r} + \frac{60}{r} + \frac{148}{r}}{r} = \frac{156}{r}$$



$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{156 \cdot 96 \cdot 52 \cdot 8}}{r^2} =$$

$$= 52 + 30 + 74$$

$$r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$$

$AB = 26$ дм; $BC = 15$ дм; $AC = 37$ дм.

15. Найдите площади треугольников ABO, BCO, ACO, где O — центр окружности, вписанной в в треугольник ABC, у которого $AB = 28$ см, $BC = 15$ см, $AC = 41$ см.

$$S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} r \cdot AB = 14 \text{ ч}$$

$$S_{\Delta BCO} = \frac{15}{2} \text{ ч}$$

$$S_{\Delta ACO} = \frac{41}{2} \text{ ч}$$

Найдем $S_{\Delta ABC}$.

$$p = \frac{15 + 41 + 28}{2} = 42$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{42 \cdot 14 \cdot 27 \cdot 1} = 126 = 14 \text{ ч} + \frac{15}{2} \text{ ч} + \frac{41}{2} \text{ ч} = 42 \text{ ч} \Rightarrow r = 3$$

$$S_{\Delta ABO} = 42 \text{ см}^2 \quad S_{\Delta BCO} = 22,5 \text{ см}^2 \quad S_{\Delta ACO} = 61,5 \text{ см}^2$$

16. Найдите радиус описанной (R) и вписанной (r) окружностей для треугольника со сторонами, равными: 1) 35, 29, 8; 2) 4, 5, 7.

1) $p = \dfrac{35+29+8}{2} = 36 \quad S = \sqrt{36\cdot 7\cdot 28\cdot 1} = 84$

$R = \dfrac{35\cdot 29\cdot 8}{4\cdot 84} = \dfrac{145}{6}$; $r = \dfrac{2\cdot 84}{35+29+8} = \dfrac{7}{3}$

2) $p = \dfrac{4+5+7}{2} = 8 \quad S = \sqrt{8\cdot 4\cdot 3\cdot 1} = 4\sqrt{6}$

$R = \dfrac{4\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 4\sqrt{6}} = \dfrac{35}{4\sqrt{6}}$; $r = \dfrac{2\cdot 4\sqrt{6}}{4+5+7} = \dfrac{8\sqrt{6}}{16} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

17. Докажите с помощью теоремы Чевы, чо медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть AA', BB', CC' — медианы данного треугольника ABC. Тогда точки A', B', C' являются по определению серединами его сторон. Значит, $\dfrac{AC'}{C'B} = \dfrac{BA'}{A'C} = \dfrac{CB'}{B'A} = 1$. Поэтому произведение этих отношений также равно 1. По теореме Чевы (обратное утверждение) отсюда следует, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Замечание. Можно доказать, что теорема Чевы имеет место и в том случае, когда некоторые из точек A', B', C' лежат не на самих сторонах, а на их продолжениях. Но при этом надо учитывать, что прямые AA', BB', CC' могут быть и параллельными, т.е. могут «пересекаться в бесконечно удаленной точке».

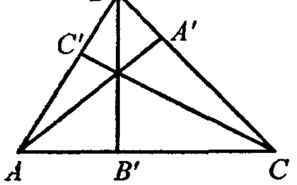
18. Докажите с помощью теоремы Чевы, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Пусть AA', BB', CC' — биссектрисы данного треугольника ABC.

$\dfrac{AC'}{C'B}\cdot\dfrac{BA'}{A'C}\cdot\dfrac{CB'}{B'A} = \dfrac{AC}{BC}\cdot\dfrac{AB}{AC}\cdot\dfrac{BC}{AB} = 1$ (по теореме 9.1)

Поэтому по обратному утверждению теоремы Чевы имеем, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

19. Докажите с помощью теоремы Чевы, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.



$\Delta ABA' \sim \Delta BC'C \Rightarrow \dfrac{A'B}{BC'} = \dfrac{AB}{BC}$

$$\Delta BCB' \sim \Delta AA'C \Rightarrow \frac{B'C}{A'C} = \frac{BC}{AC}, \quad \Delta ACC' \sim \Delta ABB' \Rightarrow \frac{AC'}{AB'} = \frac{AC}{AB}$$

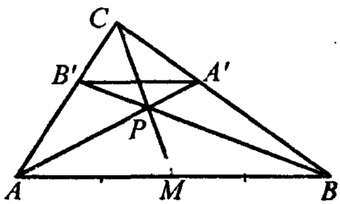
$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{AB'} \cdot \frac{B'C}{A'C} \cdot \frac{A'B}{BC'} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AB}{BC} = 1,$$

значит, по обратному утверждению теоремы Чевы высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

21. На медиане CM треугольника ABC дана точка P, через которую проведены прямые AP и BP, пересекающие стороны BC и AC треугольника в точках A' и B' соответственно. Докажите, что если $AA' = BB'$, то данный треугольник равнобедренный.

По теореме Чевы: $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BM}{AM} = \frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} = 1$

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{A'B}{A'C} \qquad (1)$$



$$\frac{AB'}{B'C} + 1 = \frac{A'B}{A'C} + 1;$$

$$\frac{AB' + B'C}{B'C} = \frac{A'B + A'C}{A'C};$$

$$\frac{AC}{B'C} = \frac{BC}{A'C} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \angle CB'A' = \angle CAB,$$

$\angle CA'B' = \angle CBA$, а значит $A'B' \parallel AB$, т.е. $AB'A'B$ — трапеция.

Если $AA' = BB'$, то эта трапеция равнобокая, т.е. $AB' = A'B$.

Тогда из соотношения (1) $B'C = A'C$, а значит

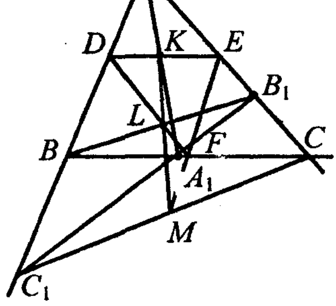
$AC = AB' + B'C = A'C + A'B = BC$, т.е. ΔABC равнобедренный.

23. Прямая пересекает стороны BC, AC и AB треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 лежат на одной прямой.

Построим треугольник ΔDEF, где D, E, F — середины сторон AB, AC и BC соответстсвенно.

$$\frac{DK}{KE} \cdot \frac{EM}{FM} \cdot \frac{FL}{LD} = \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = -1$$

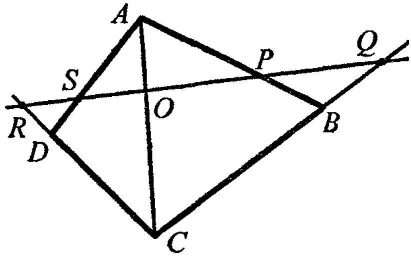
по теореме Менелая.



Значит, по обратному утверждению теоремы Менелая точки K, L и M лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

24. Прямая пересекает стороны AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$ или их продолжения соответственно в точках P, Q, R, S. Докажите, что образовавшиеся отрезки удовлетворяют соотношению

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1.$$



Проведем диагональ AC.

Применим теорему Менелая к данной прямой и ΔADC:

$$\frac{AO}{OC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=-1$$

Применим теорему Менелая к данной прямой и ΔABC:

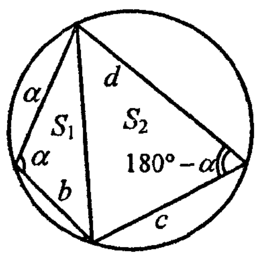
$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{CQ}\cdot\frac{CO}{AO}=-1$$

Перемножим полученные равенства:

$$\frac{AO}{DC}\cdot\frac{CO}{AO}\cdot\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{AC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1.$$

25. Докажите, что площадь четырехугольника со сторонами a, b, c, d, вписанного в окружность, вычисляется по формуле $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где p — полупериметр данного четырехугольника.



$$S_1=\frac{1}{2}ab\cdot\sin\alpha$$

$$S_2=\frac{1}{2}cd\cdot\sin(180°-\alpha)=\frac{1}{2}cd\sin\alpha$$

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{2}\sin\alpha(ab+cd)$$

Квадрат диагонали равен:

$$d^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$$

С другой стороны,

$$d^2=c^2+d^2-2cd\cos(180°-\alpha)=c^2+d^2+2cd\cos\alpha$$

Имеем: $a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2+2cd\cos\alpha$

$$\cos\alpha(2ab+2cd)=a^2+b^2-c^2-d^2$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha =$$

$$= (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) =$$

$$= \frac{2(ab+cd)-a^2-b^2+c^2+d^2}{2(ab+cd)} \cdot \frac{2(ab+cd)+a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} =$$

$$= \frac{\left((c+d)^2-(a-b)^2\right)\cdot\left((a+b)^2-(c-d)^2\right)}{4(ab+cd)^2} =$$

$$= \frac{(c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{4(ab+cd)^2} =$$

$$= \frac{2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2\cdot(p-c)\cdot 2(p-d)}{4(ab+cd)^2}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{(ab+cd)}$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{(ab+cd)}\cdot(ab+cd) =$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

26. Найдите площадь четырехугольника, вписанного в окружность, стороны которого в порядке их обхода равны:

1) 1 см, 4 см, 8 см, 7 см; 2) 2 см, 5 см, 11 см, 10 см.

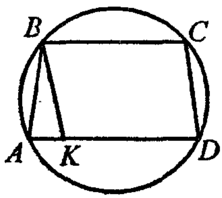
1) $p = \frac{1+4+8+7}{2} = 10$ (см)

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \sqrt{9\cdot6\cdot3\cdot2} = 18$ (см^2)

2) $p = \frac{2+5+11+10}{2} = 14$ (см)

$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \sqrt{12\cdot9\cdot3\cdot4} = 36$ (см^2)

27. Докажите, что около равнобокой трапеции можно описать окружность. Верно ли обратное утверждение?



Пусть $ABCD$ — равнобокая трапеция, т.е. $AB = CD$.

Проведем $BK \parallel CD$. Тогда $BCDK$ — параллелограмм, ΔABK — равнобедренный.

Пусть $\angle A = \alpha$.

Тогда $\angle BKA = \alpha$, $\angle AKB = 180° - 2\alpha$, $\angle BKD = 180° - \alpha$

$\angle BCD = \angle BKD = 180° - \alpha$.

$\angle A + \angle \cos = \alpha + 180° - \alpha = 180°$

Аналогично показывается, что $\angle B + \angle D = 180°$, а значит около равнобокой окружности можно описать окружность.

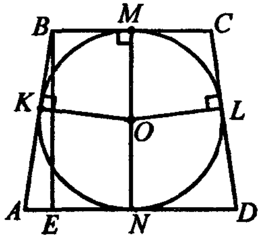
Обратно, пусть трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Тогда $\angle C = 180° - \angle A$, $\angle D = 180° - \angle C = \angle A$.

Т.к. $\angle A = \angle D$, то трапеция $ABCD$ равнобокая.

28. Равнобокая трапеция описана около окружности с радиусом 12 дм. Точка касания делит ее боковую сторону в отношении 9 : 4. Найдите площадь трапеции.

$AK : KB = 9 : 4 = DL : LC$

Пусть $BK = 4x$, тогда $AK = 9x$, $BH = 4x$, $MC = CL = 4x$, $LD = ND = 9x$, $AN = 9x$.



$$AB^2 = BE^2 + AE^2 = BE^2 + \left(\frac{AD - BC}{2}\right)^2$$

$(13x)^2=576+(5x)^2$

$144x^2=576$

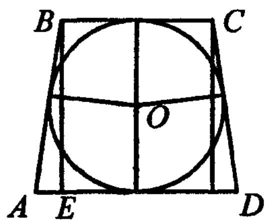
$x^2=4$

$x=2$

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot h =$$

$= 13x \cdot 24 = 26 \cdot 24 = 624$ (дм^2).

29. Около окружности радиуса r описана равнобокая трапеция с основаниями $2a$ и $2b$. Докажите, что $r^2 = ab$.



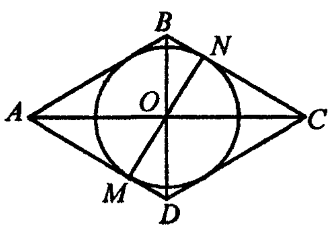
$AB + CD = 2a + 2b$

$2AB = 2a + 2b \Rightarrow AB = CD = a + b$

$BE = 2r = \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} =$

$= \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab} \Rightarrow r = \sqrt{ab}.$

30. Найдите расстояние между сторонами ромба, диагонали которого равны d_1 и d_2.



В ромб можно вписать окружность радиуса r с центром в точке пересечения диагоналей ромба.

Расстояние между сторонами ромба равно $MN = 2r$.

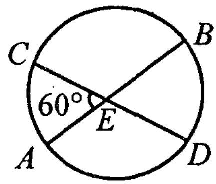
С одной стороны, $S_{ABCD} = 4S_{\Delta BOC} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot \sqrt{\frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4}} = r\sqrt{d_1^2 + d_2^2}$.

С другой стороны, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

Приравняем $r\sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

$$MN = 2r = \frac{d_1 d_2}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$$

31. Две хорды пересекаются внутри окружности под углом 60° Найдите градусные меры двух дуг, заключенных между сторонами этого угла и их продолжениями, если они относятся как 1 : 3.



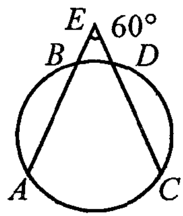
$$60° = \frac{\overset{\smile}{AC} + \overset{\smile}{BD}}{2} \Rightarrow \overset{\smile}{AC} + \overset{\smile}{BD} = 120°$$

Так как $\overset{\smile}{AC} : \overset{\smile}{BD} = 1:3$,

то $\overset{\smile}{AC} = 30°$; $\overset{\smile}{BD} = 90°$.

32. Продолжения хорд пересекаются вне окружности под углом 60°.

Найдите градусные меры двух дуг, заключенных между сторонами этого угла, если они относятся как 1 : 3.

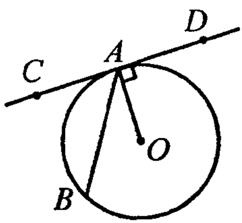


$$60 = \frac{\overset{\smile}{AC} - \overset{\smile}{BD}}{2} \Rightarrow \overset{\smile}{AC} - \overset{\smile}{BD} = 120°$$

Т.к. $\overset{\smile}{AC} : \overset{\smile}{BD} = 3:1 \Rightarrow \overset{\smile}{AC} = 180°$, $\overset{\smile}{BD} = 60°$.

33. Хорда делит окружность на части, отношение которых равно 3 : 7.

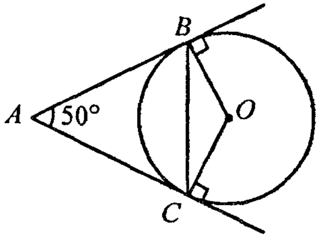
Найдите углы, которая образует эта хорда с касательной к окружности, проведенной в ее конце.



$$\angle CAB = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} \cdot 360° = 54°$$

$$\angle DAB = 180° - \angle CAB = 126 .$$

34. Угол между касательными, проведенными из одной точки окружности, равен 50°. Найдите градусные меры дуг этой окружности, заключенных между точками касания.



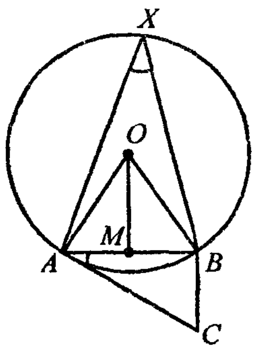
$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle BOC \Rightarrow \angle BOC = 2\angle ABC = 2\cdot\frac{180° - 50°}{2} = 130°$$

Тогда градусные меры искомых дуг равны 130° и 360° – 130°= 230°.

35. Дан треугольник ABC. Постройте геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под углом, равным углу A этого треугольника.

Искомое геометрическое место точек является дугой окружности с концами в точках A и B (концах отрезка).

Чтобы найти центр этой окружности, проведем перпендикуляр к отрезу AB через его середину M и востановим перпендикуляр к стороне AC данного треугольника (так как AC касательная) в вершине A (рис. 204).



Пусть O — точка их пересечения.

Дуга окружности с центром в этой точке и радиусом OA, расположенная в верхней полуплоскости относительно прямой AB, является искомым геометрическим местом точек, так как любой вписанный в нее угол AXB равен половине центрального угла AOB и, значит, по теореме 9.10 равен углу A данного треугольника ABC.

36. Докажите, что если через точку S, расположенную внутри окружности, проведено больше двух хорд, то произведение отрезков любой из хорд одинаково для всех хорд.

Пусть через точку S проведено n хорд

$A_1B_1,\ A_2B_2,\ \ldots,\ A_nB_n$.

Проведем диаметр окружности через точку S; K и L — точки пересечения этого диаметра с окружностью.

$SA_1 \cdot SB_2 = KS \cdot SL$

$SA_2 \cdot SB_2 = KS \cdot SL$

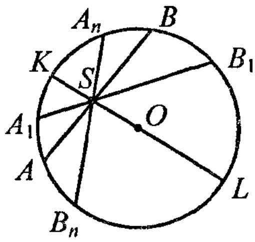
...

$SA_n \cdot SB_n = KS \cdot SL$.

Поэтому

$SA_1 \cdot SB_1 = SA_2 \cdot SB_2 = ... = SA_n \cdot SB_n$

$\forall n \in \square$.



37. Из точки C проведена касательная к окружности, отрезок CD которой с концом в точке касания D равен a, и секущая CB. Найдите длину секущей, если отношение внешней ее части к внутренней равно $m : n$.

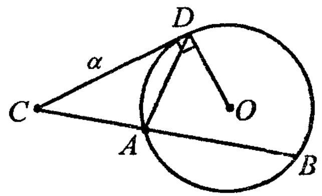
$$AC \cdot BC = a^2 \Rightarrow BC = \frac{a^2}{AC} = AC + AB \Rightarrow AB = \frac{a^2}{AC} - AC$$

$$AC : AB = \frac{m}{n} \Rightarrow AB = AC \cdot \frac{n}{m} = \frac{a^2}{AC} - AC$$

$$AC^2 \cdot \frac{m}{n} \Rightarrow AB = AC \cdot \frac{n}{m} = \frac{a^2}{AC} - AC$$

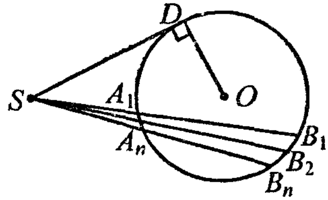
$$AC^2 \cdot \frac{n}{m} = a^2 - AC^2$$

$$BC^2\left(\frac{n}{m} + 1\right) = a^2 \Rightarrow AC = \frac{a}{\sqrt{\frac{n}{m} + 1}};$$



$$BC = \frac{a^2}{AC} = a\sqrt{1 + \frac{n}{m}}$$

38. Докажите, что если из точки S, расположенной вне данной окружности, проведено несколько секущих, то произведение отрезков любой из этих секущих с концом в точке S одинаково для всех секущих.

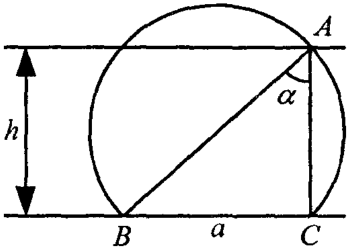


$$SA_1 \cdot SB_1 = SA_2 \cdot SB_2 = ... =$$

$$= SA_n SB_n = SD^2$$

39. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и высоте, опущенной из вершины этого угла.

Решение.



Пусть сторона BC искомого треугольника ABC равна a, противолежащий ей угол A равен α, а высота, проведенная из вершины этого угла, равна h. Допустим, задача решена (рис. 207). Тогда вершина A принадлежит геометрическому месту точек, из которых отрезок BC виден под углом α и которые расположены по одну сторону от прямой BC, т.е. дуге окружности с концами в точках B и C. Кроме того, она лежит на прямой, параллельной прямой BC, т.е. дуге окружности с концами в точках B и C. Кроме того, она лежит на прямой, параллельной прямой BC и отстоящей от нее на расстоянии h. Поэтому вершина A является их точкой пересечения.

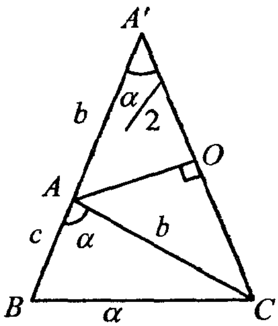
Для решения задачи достоточно построить прямую, параллельную AC и отстоящую от нее на h, и воспользоваться решением задачи 35 из п. 87. Задача может иметь два решения, одно решение или ни одного. Это зависит от числа точек пересечения прямой, параллельной прямой BC, с дугой окружности с концами в точках B и C.

40. Посторойте треугольник по стороне, противолежащему углу и сумме двух других сторон.

Пусть здача решена. Продолжим сторону AB треугольника на отрезок, равный стороне AC.

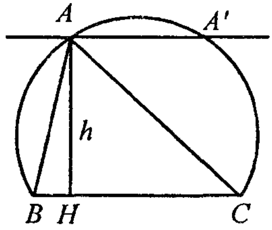
Тогда $\Delta AA'C$ — равнобедренный.

$$\angle AA'C = \frac{180-(180-\alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$



Для решения задачи достаточно построить $\Delta AA'C$ (воспользовавшись решением задачи 35 и тем, то мы знаем величину $b+c$), а затем из середины O стороны стороны $A'C$ восстановить перпендикуляр, точка пересечени которого со стороной $A'B$ и задаст вершину A.

41. Превратите данный треугольник в равновеликий ему треугольник с тем же основанием и заданным углом при противолежащей вершине.



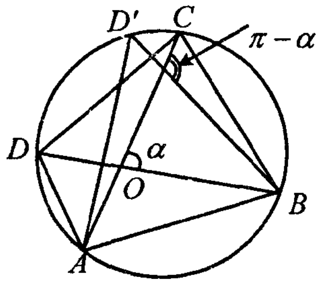
Пусть дан треугольник ABC

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} h \cdot BC$$

$$S_{\Delta A'BC} = \frac{1}{2} h' \cdot BC$$

Поэтому для выполнения равенства $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A'BC}$ необходимо $h = h'$. Искомый равновеликий треугольник — это $\Delta A'BC$, где A' принадлежит дуге окружности, с точек которой основние BC видно под данным углом BAC и отстоит от основания BC на расстояние AH.

42. Постройте четырехугольник $ABCD$ по сторонам AB, BC, диагонали AC и углу между диагоналями, если известно, что он является вписанным в окружность.



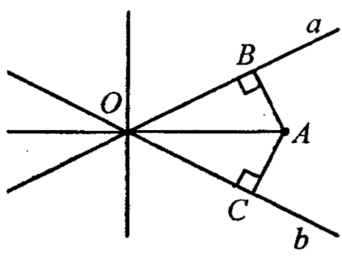
Построим ΔABC по трем сторонам и опишем около него окружность. ГМТ, из которых сторона BC видна под углом α (угол между диагоналями) — это дуга окружности (задача № 35).

O — точка пересечения этой дуги с AC. D — точка пересечения BO с окружностью, описанной около ΔABC.

$ABCD$ — искомый треугольник.

Второе решение получается, если сторона BC видна под углом $\pi - \alpha$. Получаем четырехугольник $ABCD'$.

43. Докажите, что геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых, состоит из биссектрис углов, получающихся при пересечении этих прямых.

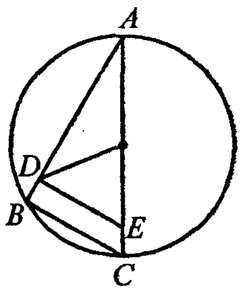


Пусть точка A равноудалена от прямых a и b, т.е. $AB=AC$ ($AB \perp a$, $AC \perp b$).

Тогда $\Delta ABO = \Delta ACO \Rightarrow \angle BOA = \angle AOC$, т.е. точка A лежит на биссектрисе угла BOC.

Аналогичная ситуация, если точка лежит внутри угла, смежного с $\angle BOC$. Таким образом, ГМТ, равноудаленных от двух пересекающихся прямых — это биссектрисы углов, образованных этими прямыми.

44. Найдите геометрическое место точек, которые делят в отношении $m : n$ все хорды, имеющие своим общим концом данную точку окружности.



Пусть AC — хорда, проходящая через центр окружности, AB — другая хорда. Точки D и E делят хорды AB и AC в отношении $m : n$.

$\angle ABC = 90°$ (опирается на диагональ AC)

$\Delta ADE \infty \Delta ABC$ (по 2 сторонам и углу).

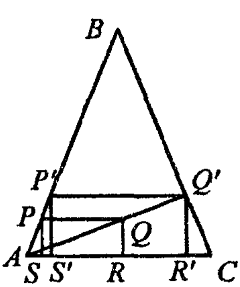
Поэтому $\Delta ADE \infty \Delta ABC = 90°$.

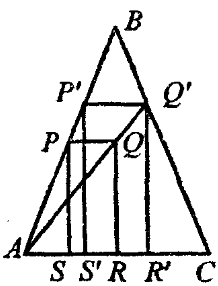
Точка D лежит на окружности, описанной около ΔADE с центром в середине стороны AE. Таким образом, геометреческое место искомых точек — это окружность, касающаяся данной окружности в данной точке.

45. Впишите в данный треугольник квадрат, у которого две вершины лежат на одной из сторон треугольника, а две остальные — на двух других его сторонах.

Задача решена в учебнике п. 91 стр. 151.

46. Впишите в данный равнобедренный треугольник прямоугольник со сторонами, относящимися как 1 : 3, две вершины которого лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах.



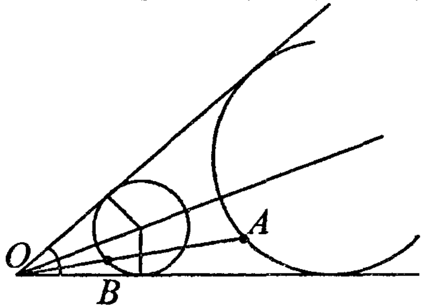


Поступим аналогично решению предыдущей задачи — возьмем произвольную точку P на боковой стороне AB треугольника ABC и построим прямоугольник $PQRS$, где $R, S \in AC$, $RS = 3PS$ (или $\frac{1}{3}PS$).

Применим гомотетию с центром в точке A и коэффициентом гомотетии $k = \frac{AQ'}{AQ}$.

Получим искомый прямоугольник.

47. Дан угол и внутри него точка A. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и и проходящую через точку A.



Построим сначала какую-нибудь окружность, касающуюся сторон угла (ее центр лежит на биссектрисе угла) и применим гомотетию с центром в точке O и коэффициентом гомотетии $p = \frac{OA}{OB}$ (B — точка пересечения прямой OA к построенной окружности).

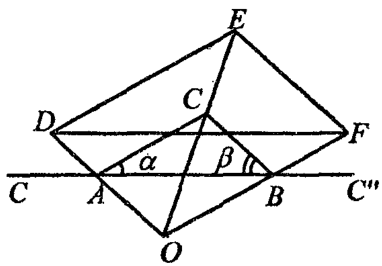
48. Постройте треугольник по его двум углам и периметру.

Построим какой-нибудь треугольник, два угла которого равны данным углам α и β.

Развернем его на прямую AB ($AC' = AC$, $BC'' = BC$).

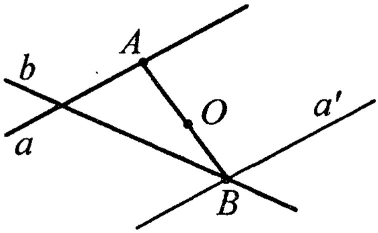
Тогда периметр ΔABC равен $C'C''$.

Применим преобразования подобия с центром в любой точке и коэффициентом подобия, равным $\frac{P}{C'C''}$ (P — периметр искомого треугольника) и получим искомый треугольник DEF.



49. Даны пересекающиеся прямые и точка, не лежащая на них. Постройте отрезок с концами на данных прямых и серединой в данной точке.

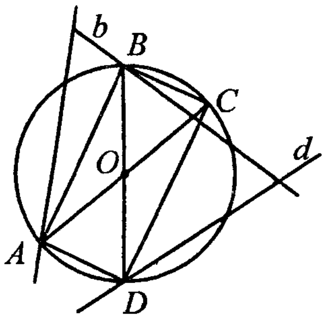
Решение. Пусть a и b — данные прямые и O — данная точка (рис. 209). Допустим, что задача решена. Тогда концы отрезка AB будут симметричными относительно точки O как середины отрезка. Поэтому при симметрии относительно этой точки отрезок переходит в себя и, значит, прямая a', в которую переходит при этой симметрии прямая a, проходит через конец B отрезка AB.



Таким образом, конец B искомого отрезка получается при пересечении прямой b с прямой a', симметричной прямой a относительно точки O. После этого достаточно провести прямую BO до пересечения с прямой a. Получим второй конец отрезка — точку A.

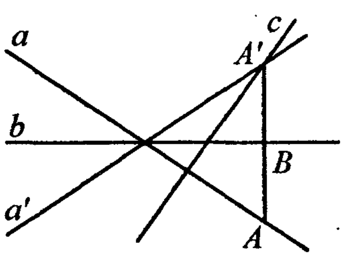
50. Постройте прямоугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в данной точке O, вершина A лежит на данной прямой a, а вершины B и D — на пересекающихся прямых b и d, не проходящих через точку O. Всегда ли задача имеет решение?

Воспользовавшись решением задачи № 49, построим отрезок BD с серединой в точке пересечения диагоналей O.



Точка A лежит на пересечении прямой a с окружностью с центром в точке O и радиусом OB. Точка C лежит на пересечении прямой AO с данной окружностью. Задача имеет решение, если прямая b имеет с данной окружностью общие точки.

51. Даны попарно пересекающиеся прямые a, b, c. Постройте отрезок с серединой на прямой b, перпендикулярный ей, и концами на a и c. Всегда ли задача имеет решение?



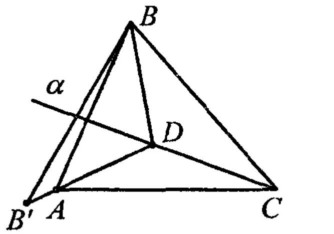
Построим прямую a', симметричную прямой a относительно прямой b.

Пусть $a' \cap c = A'$, A — точка, симметричная точке A' относительно прямой b. $A' \in a$.

AA' — искомый отрезок.

Задача не имееет решения, если $a' \parallel c$.

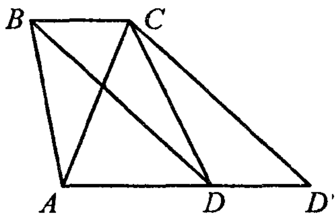
52. Дан треугольник ABC и прямая d, проходящая через вершину C и пересекающая сторону AB. Найдите на прямой d точку D, из которой стороны AC и BC треугольника видны под равными углами.



Пусть точка B' симметрична точке B относительно прямой d, D — точка пересечения прямых AB' и d. Тогда $BD=B'D$; $BC=B'C$.

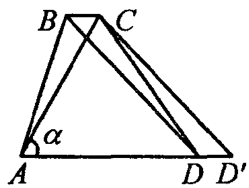
$\Delta BDC = \Delta B'DC$ по трем сторонам, поэтому $\angle ADC = \angle BDC$.

53. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.



Задача построения искомой трапеции $ABCD$ сводится параллельным переносом на основание BC к построению $\Delta ACD'$ ($D'C = BD$, $AD' = AD + BC$) по известным трем сторонам AC, BD и $AD + BC$.

54. Постройте трапецию по одному углу, двум диагоналям и средней линиии.



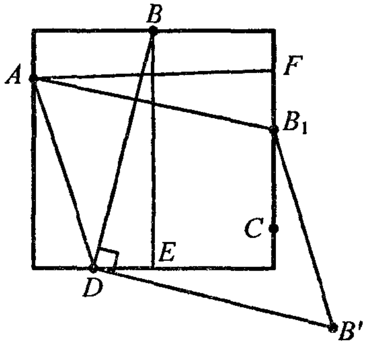
Построим треугольник ACD' (AC, CD' — диагонали трапеции, AD' — удвоенная средняя линия трапеции).

Отложим от прямой DA в точке A данный угол α.

B — точка пересечения стороны этого угла с прямой, параллельной DA и проходящей через точку C. Точка D получается из точки D' сдвигом вдоль прямой AD на расстояние BC. $ABCD$ — искомая трапеция.

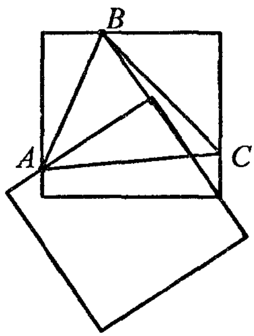
55. Постройте квадрат, стороны которого проходят через четыре заданные точки A, B, C, D. α

Решение. Допустим, что квадрат построен (рис. 210). Повернем отрезок DB около точки D на угол 90°. Получим отрезок DB'. А теперь перенесем его параллельно так, чтобы точка D совместилась с точкой A. При этом точка B' попадет в точку B_1 на стороне квадрата, которая проходит через точку C (или на продолжение этой стороны). Это следует из равенства прямоугольных треугольников BED и AFB_1 (у них гипотенузы BD и AB_1 равны по построению, а катеты BE и AF равны стороне квадрата).



Построив точку B_1, проводим прямую CB_1, на которой лежит сторона квадрата. Далее проводим через точку A прямую, параллельную CB_1, и через точки B и D прямые, перпендикулярные этой прямой. Искомый квадрат построен.

56. Впишите в квадрат равносторонний треугольник с заданной вершиной на одной из сторон квадрата.



Повернем квадрат на 60° около заданной вершины равностороннего треугольника A.

B — точка пересечения одной из сторон получившегося кадрата со стороной исходного квадрата, смежной со стороной, содержащей точку A. C — пересечение окружности с центром B и радиусом AB и исходного квадрата.

• **58.** Что представляет собой фигура, задаваемая каноническим уравнением эллипса, если $a = b$?

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Если $a=b$, то имеем $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

$x^2+y^2=a^2$ — уравнение окружности радиуса a с центром начале координат.

59. Дана окружность $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$. Пусть плоскость xy равномерно сжимается относительно оси x так, что точка $(x; y)$ переходит в точку $(x'; y')$, где $x' = x$, а $y' = \frac{b}{a}.y$, $b \neq a$. В какую фигуру переходит при этом данная окружность?

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ переходит в уравнение

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2\cdot\frac{a^2}{b^2}}{a^2}=1,$$

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1$$ — уравнение эллипса.

Т.е. данная окружность переходит в эллипс.

60. Выведите каноническое уравнение гиперболы, исходя из ее уравнения $\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$.

Пусть $MF_1 > MF_2$ тогда

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$(x-c)^2+y^2+(x+c)^2+y^2-2\sqrt{\left((x-c)^2+y^2\right)\left((x+c)^2+y^2\right)}=4a^2$$

$$\sqrt{\left(x^2-c^2\right)^2+y^2(x-c)^2+y^2(x+c)^2+y^4}=x^2+y^2+c^2-2a^2$$

x^4-$2x^2c^2$+c^4+$y^2(2x^2$+$2c^2)$+y^4=

=x^4+y^4+c^4+$4a^4$+$2x^2y^2$+$2x^2c^2$-$4a^2x^2$+$2y^2c^2$-$4a^2y^2$-$4a^2c^2$

$4x^2c^2$-$4a^2x^2$-$4a^2y^2$-$4a^2c^2$+$4a^4$=0

$$x^2\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (b^2=c^2-a^2)$$

Аналогичное уравнение получим, если $MF_1 < MF_2$.

61. Докажите, что ветви гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ расположены вне прямоугольника $|x| < a$, $|y| < b$, но внутри вертикальных углов, образованных прямыми, содержащими его диагонали.

Для точек (x, y), лежащих внутри прямоугольника $|x| < a$, $|y| < b$ выполняется $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}<1$, поэтому внутри этого прямоугольника нет точек гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Прямые, содержащие диагонали этого прямоугольника, имеют уравнения $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Вне вертикальных углов, образованных этими прямыми, выполняется неравенство $\left|\frac{y}{x}\right| > \frac{b}{a}$.

Если же $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то $y^2 = \frac{x^2}{a^2}b^2 - b^2$.

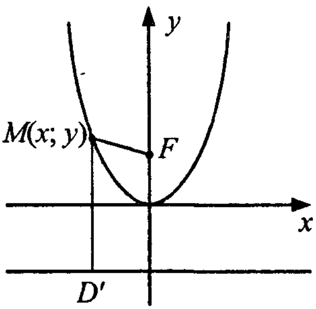
$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^2}{x^2} < \frac{b^2}{a^2}$$

$$\left|\frac{y}{x}\right| < \frac{b}{a}.$$

Поэтому ветви гиперболы расположены внутри этих вертикальных углов.

62. Составьте каноническое уравнение параболы, осью симметрии которой является ось y, считая, что расстояние от ее фокуса до директрисы равно p.

Фокус F имеет координаты $\left(0; \frac{p}{2}\right)$.



$$MF = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2}$$

$$MD' = y + \frac{p}{2}$$

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = y + \frac{p}{2}$$

$$x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$

$x^2 = 2py$.

Учебно-методическое издание

Морозов Александр Валерьевич

Домашняя работа по геометрии за 11 класс

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ 77.99.60.953.Д.013269.11.07 от 13.11.2007 г.

Выпускающий редактор *Л.Д. Лаппо*
Дизайн обложки *Л.В. Демьянова*
Компьютерная верстка *Т.Н. Меньшова*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры,
литература учебная

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7
Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

**По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).**